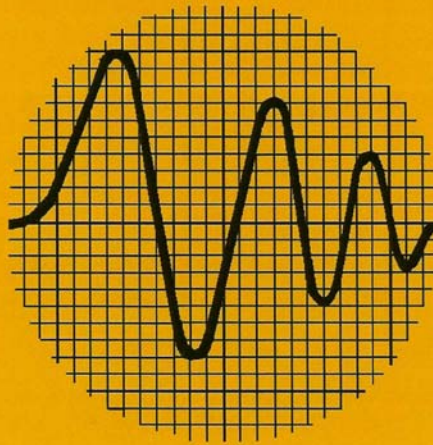


Mircea Radeş

Vibrații mecanice



Editura
PRINTECH

Mircea Radeş

Vibrații mecanice

Editura Printech

Prefață

Lucrarea se bazează pe cursurile de *Vibrații mecanice* predate la Universitatea Politehnica București, la facultatea I.M.S.T. (1972-2006), la cursul postuniversitar de *Vibrații* organizat în cadrul Catedrei de Rezistența materialelor (1985-1990), la Facultatea de Inginerie în Limbi Străine, Filiera Engleză (1993-2007) și la un curs de masterat de la Facultatea de Inginerie Mecanică și Mecatronică.

Vibrațiile mecanice au fost introduse în planul de învățământ al facultăților cu profil mecanic ca un curs de sine stătător în 1974. Pentru a susține cursul, am publicat, sub conducerea profesorului Gh. Buzdugan, monografia *Vibrațiile sistemelor mecanice* la Editura Academiei în 1975, urmată de două ediții ale manualului *Vibrații mecanice* la Editura didactică și pedagogică în 1979 și 1982. În 1984 am publicat *Vibration Measurement* la Martinus Nijhoff Publ., Dordrecht, reprezentând versiunea revizuită în limba engleză a monografiei ce a apărut în 1979 la Editura Academiei.

După cum reiese din *Cuprins*, cursul este orientat spre aplicații ingineresti, fiind limitat la ceea ce se poate preda în 28 ore. Materialul prezentat conține exerciții rezolvate care susțin seminarul, în cadrul căruia se utilizează programe cu elemente finite elaborate de autor și se prezintă lucrări demonstrative de laborator, fiind utile și la rezolvarea temelor de casă. Cursul urmărește a) descrierea fenomenelor vibratorii întâlnite în practica inginerescă; b) modelarea sistemelor vibratoare și analiza acestora cu metoda elementelor finite; și c) înarmarea studenților cu baza fizică necesară în modelarea analitică și numerică a structurilor în vibrație și a mașinilor, pentru elaborarea soluțiilor ingineresti ale problemelor de vibrații.

În volumul al doilea se vor prezenta vibrațiile autoîntreținute, metode de calcul pentru probleme de valori proprii de ordin mare, estimarea parametrilor sistemelor vibratoare pe baza analizei funcțiilor răspunsului în frecvență, analiza modală experimentală și încercările la vibrații. Nu se tratează dinamica sistemelor rotor-lagăre și vibrațiile discurilor și paletelor, acestea fiind studiate în cadrul cursului de *Dinamica mașinilor*.

Decembrie 2008

Mircea Radeș

Cuprins

Prefață	i
Cuprins	iii
1. Modelarea sistemelor vibratoare	1
1.1 Vibrații și oscilații	1
1.2 Sisteme discrete și sisteme continue	2
1.3 Sisteme cu un grad de libertate	3
1.4 Mișcări vibratorii	4
1.5 Amortizarea vibrațiilor	6
2. Sisteme cu un grad de libertate	9
2.1 Vibrații libere neamortizate	9
2.1.1 Sistemul masă-arc	9
2.1.2 Rigiditatea elementelor elastice	11
2.1.3 Sisteme torsionale	13
2.1.4 Metoda energetică	15
2.1.5 Metoda lui Rayleigh	16
2.2 Vibrații forțate neamortizate	20
2.2.1 Excitarea masei cu o forță arbitrară	20
2.2.2 Excitarea masei cu o forță armonică	21
2.2.3 Bătăi	23
2.2.4 Curbe de răspuns în frecvență	24
2.2.5 Rezonanța	25
2.2.6 Trecerea prin rezonanță	27
2.2.7 Rezonanța cu amplitudine constantă a deplasării	27
2.2.8 Excitația cu mase excentrice în rotație	28
2.2.9 Antirezonanța	29
2.2.10 Transmisibilitatea	30
2.2.11 Turația critică a rotorului Laval	31

2.3	Vibrații libere amortizate	33
2.3.1	Amortizarea vâscoasă	34
2.3.2	Decrementul logaritmic	37
2.3.3	Factorul de pierderi	40
2.4	Vibrații forțate amortizate	40
2.4.1	Vibrații staționare cu amortizare vâscoasă	41
2.4.2	Diagrama deplasare-forță	44
2.4.3	Amortizarea structurală	46
2.4.4	Metoda punctelor de semi-putere	47
2.4.5	Metoda masei adiționale	49
2.4.6	Rezolvarea prin algebra complexă	50
2.4.7	Funcțiile răspunsului în frecvență	51
2.4.8	Diagrama polară a receptanței pentru amortizare vâscoasă	55
2.4.9	Transmisibilitatea în sisteme amortizate	59
2.4.10	Teoria captorilor seismici	60
2.4.11	Precesia rotorului Laval cu amortizare externă	64
2.4.12	Amortizarea ereditară	66
2.5	Sisteme cu rigiditate cubică	71
2.5.1	Rigiditatea cubică	72
2.5.2	Răspunsul armonic	72
2.5.3	Curbele răspunsului în frecvență	74
2.5.4	Fenomene de salt	79
2.6	Vibrații tranzitorii	80
2.6.1	Răspunsul la forțe impulsive aplicate masei	80
2.6.2	Răspunsul la excitație prin șoc aplicată suportului	88
2.6.3	Spectrul răspunsului la șoc	92
	Probleme	94
3.	Sisteme cu două grade de libertate	99
3.1	Vibrații de translație	100
3.1.1	Ecuatiile de mișcare	100
3.1.2	Vibrații libere. Moduri proprii de vibrație	101
3.1.3	Ortogonalitatea modurilor proprii	105
3.1.4	Coordonate modale	106
3.1.5	Răspunsul la excitație armonică	108

3.2	Vibrații de torsiune	113
3.2.1	Ecuțiile de mișcare	113
3.2.2	Sistemul disc-arbore-disc	114
3.2.3	Sisteme cu roți dințate	120
3.2.4	Sisteme ramificate	122
3.3	Vibrații de încovoiere	124
3.3.1	Flexibilități (coeficienți de influență)	124
3.3.2	Ecuțiile de mișcare	126
3.3.3	Modurile proprii de vibrație	127
3.3.4	Vibrațiile libere	129
3.3.5	Răspunsul la excitație armonică	135
3.4	Vibrații cuplate de translație și rotație	139
3.4.1	Ecuțiile de mișcare	139
3.4.2	Modurile proprii de vibrație	141
3.5	Pendule cuplate elastic	145
3.5.1	Ecuțiile de mișcare	145
3.5.2	Modurile proprii de vibrație	146
3.5.3	Vibrații libere	147
3.6	Sisteme amortizate	150
3.6.1	Amortizarea vâscoasă proporțională	150
3.6.2	Vibrații libere amortizate	151
3.6.3	Răspunsul la excitație armonică	155
3.6.4	Amortizorul vâscos neacordat	162
3.6.5	Absorbitorul de vibrații amortizat	164
3.6.6	Amortizarea vâscoasă neproporțională	173
	Probleme	180
4.	Sisteme cu mai multe grade de libertate	185
4.1	Sisteme cu mase concentrate	186
4.1.1	Bare cu mase concentrate	186
4.1.2	Structuri multietajate forfecate	195
4.1.3	Sisteme torsionale	197
4.1.4	Structuri cu subsisteme repetate	204
4.1.5	Sisteme discrete cu mai multe mase	206

4.2	Structuri plane din bare articulate	212
4.2.1	Coordonate și funcții de formă pentru elementul <i>truss</i>	212
4.2.2	Matricile elementului în coordonate locale	214
4.2.3	Transformarea din coordonate locale în coordonate globale	215
4.2.4	Matricile elementului în coordonate globale	217
4.2.5	Asamblarea matricilor de rigiditate și de masă	218
4.2.6	Ecuțiile de mișcare și problema de valori proprii	220
4.3	Cadre plane	222
4.3.1	Analiza statică a unei grinzi de secțiune constantă	222
4.3.2	Discretizarea cu elemente finite	223
4.3.3	Funcții de formă statice pentru elementul de grindă	225
4.3.4	Matricea de rigiditate a unui element de grindă	227
4.3.5	Matricea de masă coerentă a elementului de grindă	229
4.3.6	Eforturi axiale	230
4.3.7	Matricile unui element de cadru în coordonate locale	230
4.3.8	Transformarea coordonatelor	231
4.3.9	Matricile elementului de cadru în coordonate globale	232
4.3.10	Asamblarea matricilor de rigiditate și de masă	233
4.4	Grilaje	236
4.4.1	Discretizarea cu elemente finite	236
4.4.2	Matricile elementului de grilaj în coordonate locale	237
4.4.3	Transformarea coordonatelor	239
4.4.4	Matricile elementului de grilaj în coordonate globale	240
4.5	Funcții de răspuns în frecvență	243
4.5.1	Matricea FRF	243
4.5.2	Diagramele FRF	244
	Probleme	249
5.	Sisteme continue	261
5.1	Vibrațiile laterale ale barelor zvelte	261
5.1.1	Ecuția diferențială a mișcării	261
5.1.2	Modurile proprii de vibrație	263
5.1.3	Ortogonalitatea funcțiilor proprii	269
5.1.4	Grinzi continue	271
5.1.5	Condiții la limită naturale	273

5.1.6 Răspunsul la excitație armonică	280
5.2 Vibrațiile longitudinale ale barelor	285
5.3 Vibrațiile torsionale ale barelor	288
5.4 Grinzi Timoshenko	290
6. Unde elastice	291
6.1 Propagarea undelor	291
6.2 Unde longitudinale în bare prismatice	294
6.2.1 Ecuația undelor. Soluția lui d'Alembert	294
6.2.2 Unde armonice	297
6.2.3 Unde în bara de lungime finită	302
6.2.4 Propagarea energiei prin unde	304
6.2.5 Atenuarea undelor	306
6.3 Unde transversale în bare prismatice	310
6.3.1 Viteza de fază și viteza de grup	310
6.3.2 Unde în bara rezemată pe mediu elastic	314
6.4 Unde în medii elastice	316
6.4.1 Ecuațiile undelor în trei dimensiuni	316
6.4.2 Unde longitudinale și unde transversale	318
6.4.3 Unde Rayleigh	321
6.4.4 Unde Love	327
6.5 Unde ghidate în plăci	333
6.5.1 Unde Lamb în plăci	333
6.5.2 Unde Love în plăci	337
Bibliografie	339
Index	347

1.

MODELAREA SISTEMELOR VIBRATOARE

Vibrațiile sunt fenomene dinamice întâlnite în activitatea curentă, de la bătăile inimii, alergatul și mersul pe jos, legănatul copacilor în bătaia vântului și trepidațiile clădirilor la cutremure, la vibrațiile instrumentelor muzicale, ale perforatoarelor pneumatice și benzilor transportoare oscilante.

De cele mai multe ori “vibrații” sunt denumite mișcările nedorite care produc zgomote sau solicitări mecanice relativ mari. În acest caz interesează în special efectul vibrațiilor asupra omului, mașinilor și clădirilor. Modelarea fenomenelor vibratorii implică definirea structurii și parametrilor corpurilor în vibrație, a funcțiilor care descriu excitația și a nivelelor răspunsului dinamic.

Acest capitol introductiv cuprinde definiții și clasificări, necesare pentru o imagine generală a principalelor noțiuni utilizate în studiul vibrațiilor.

1.1 Vibrații și oscilații

Conform “*Dicționarului explicativ al limbii române*” (DEX–1998), *vibrația* este o “mișcare periodică a unui corp sau a particulelor unui mediu, efectuată în jurul unei poziții de echilibru”. *Oscilația* este “variația periodică în timp a valorilor unei mărimi care caracterizează un sistem fizic, însoțită de o transformare a energiei dintr-o formă în alta”.

Oscilațiile – de natură mecanică, termică, electromagnetică etc. – sunt fenomene dinamice caracterizate prin variația în timp a unei *mărimi de stare* a sistemului, de obicei în vecinătatea valorii corespunzătoare unei stări de echilibru.

Vibrațiile sunt *oscilații ale sistemelor elastice*, adică mișcări ale sistemelor mecanice datorite unei forțe de readucere elastice. Astfel o bară elastică sau o coardă vibrează, în timp ce un pendul oscilează.

Toate corpurile care au masă și elasticitate pot vibra. Un sistem vibrator are atât *energie cinetică*, înmagazinată în masa în mișcare, cât și *energie*

potențială, înmagazinată în elementul elastic ca *energie de deformație*. În timpul vibrațiilor, are loc o transformare ciclică a energiei potențiale în energie cinetică și invers.

Într-un sistem conservativ, în care nu există disipare de energie, energia mecanică totală este constantă. În poziția de amplitudine maximă a deplasării, viteza instantanee este zero, sistemul are numai energie potențială. În poziția de echilibru static, energia de deformație este nulă iar sistemul are numai energie cinetică. Energia cinetică maximă este egală cu energia de deformație maximă. Egalând cele două energii se poate calcula frecvența proprie fundamentală de vibrație. Acesta este principiul *metodei lui Rayleigh*.

Sistemele vibratoare sunt supuse *amortizării* datorită pierderii de energie prin disipare sau radiație. Amortizarea produce descreșterea amplitudinii vibrațiilor libere, defazajul între excitație și răspuns, precum și limitarea amplitudinii răspunsului forțat al sistemelor vibratoare.

1.2 Sisteme discrete și sisteme continue

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem vibrator este egal cu numărul coordonatelor *independente* necesare pentru a defini complet configurația instantanee a sistemului.

Rezultă că pentru a defini mișcarea tuturor particulelor unui sistem, numărul gradelor de libertate ar trebui să fie infinit. Totuși, în probleme practice, se utilizează sisteme similare din punct de vedere dinamic, cu număr redus de grade de libertate.

Criteriile prin care se stabilește numărul gradelor de libertate ale unui sistem se bazează pe considerente practice. Astfel, unele dintre mișcărilor posibile ale sistemului pot fi atât de mici încât să nu prezinte interes. Grupuri de particule cu mișcări practic similare pot fi considerate corpuri rigide, ceea ce permite reducerea numărului coordonatelor necesare pentru descrierea mișcării. Domeniul frecvențelor forțelor excitatoare poate fi atât de îngust încât numai una sau câteva dintre frecvențele proprii pot da naștere la rezonanțe.

Aceste considerații conduc la conceptul de *mase concentrate* care sunt corpuri rigide conectate prin elemente elastice cu masa neglijabilă. Mișcările descrise de astfel de *sisteme discrete* sau *cu parametri concentrați* sunt adesea aproximări suficient de bune ale vibrațiilor reale pentru a satisface cerințele practice, oferind date utile proiectării și valori privind limitele admisibile ale vibrațiilor.

Atunci când elementele deformabile au mase distribuite comparabile cu masele componentelor modelate prin corpuri rigide, aproximarea se poate

îmbunătăți ținând cont de masa elementelor elastice. De obicei masa proprie este concentrată într-un număr arbitrar de puncte, în funcție de gradul de aproximare dorit.

Există însă multe elemente de mașini și structuri cu formă atât de simplă încât pot fi considerate sisteme cu număr infinit de grade de libertate. Astfel de sisteme continue sau cu parametri distribuiți pot fi modelate ca bare, fire, plăci, membrane, învelișuri sau combinații ale acestora.

În aplicațiile ingineresti, structurile cu formă complicată sunt înlocuite prin modele matematice discrete. O metodă eficientă de discretizare este metoda elementelor finite. Sistemul cu număr infinit de grade libertate este înlocuit cu un sistem discret care are aceeași comportare dinamică. Structura reală este divizată (ipotetic) în subdomenii bine definite (elemente finite) care sunt atât de mici încât forma funcției câmpului de deplasări poate fi aproximată destul de precis, urmând să se determine doar mărimea acesteia. Elementele individuale sunt apoi asamblate astfel încât deplasările lor sunt compatibile la nodurile elementelor și în câteva puncte la interfața lor, tensiunile interne sunt în echilibru cu forțele aplicate reduse la noduri, și condițiile la limită sunt satisfăcute. Erorile de modelare includ alegerea unui tip neadecvat de element, funcții de formă incorecte, reazeme nepotrivite și o rețea de discretizare grosieră.

1.3 Sisteme cu un grad de libertate

Un număr surprinzător de mare de probleme de vibrații care apar în practica inginerescă pot fi rezolvate cu o precizie acceptabilă modelând sistemul real ca un corp rigid rezemat elastic, a cărui mișcare poate fi descrisă de o singură coordonată.

Cel mai simplu sistem vibrator constă din corpul a cărui mișcare este studiată și mediul înconjurător, față de care se măsoară mișcarea. Analiza acestui sistem simplificat parcurge patru etape. În prima etapă se stabilește partea sistemului care reprezintă corpul rigid și cea care reprezintă elementele deformabile. În etapa a doua se calculează parametrii dinamici ai corpului rigid și ai elementelor elastice. În etapa a treia se scriu ecuațiile de mișcare ale sistemului echivalent. Etapa a patra constă din rezolvarea ecuațiilor de mișcare în condițiile date pentru vibrații libere sau forțate. În ultimele două etape se pot utiliza metode diferite, bazate pe expresiile energiilor cinetică și potențială ale sistemului.

Primele două etape implică discernământ și experiență, care se dobândesc în practică, în procesul alegerii sistemelor echivalente, definirii mișcării acestora și comparării predicțiilor cu rezultatele măsurărilor pe sistemele reale. Verificarea și validarea modelelor pot impune reactualizarea parametrilor sistemului sau chiar a structurii modelului. Adecvarea soluției depinde în mare măsură de priceperea cu

care se aleg ipotezele simplificatoare de bază. Opțiunea principală este între un model liniar și un model neliniar. Alegerea tipului amortizării poate fi o sursă de erori, deoarece amortizarea nu poate fi calculată la fel ca masa și rigiditatea.

Ultimele două etape constau din aplicarea unor proceduri stabilite de matematicieni. Activitatea inginerescă propriu-zisă se limitează la primele două etape, în timp ce ultimele două etape pot fi considerate ca aplicări directe ale unor rețete de calcul.

În capitolul 2 se studiază sisteme cu un grad de libertate. Sistemele discrete sunt analizate în capitolele 3 și 4. Capitolul 5 este dedicat vibrațiilor barelor iar capitolul 6 este o introducere în studiul propagării undelor în bare și medii elastice infinite.

1.4 Mișcări vibratorii

În funcție de cauza care produce sau susține mișcarea vibratorie, se pot distinge: a) *vibrații libere*, produse de un impact sau o deplasare inițială; b) *vibrații forțate*, produse de forțe exterioare sau excitații cinematice; c) *vibrații parametrice* – datorite variației, produse de o cauză externă, a unui parametru al sistemului; și d) *vibrații autoexcitate* – produse de un mecanism inerent în sistem, prin conversia unei energii obținute de la o sursă de energie constantă în timp.

Un sistem elastic scos din poziția de echilibru stabil, apoi lăsat liber, efectuează *vibrații libere*. În prezența unor forțe de frecare, energia mecanică este disipată, iar vibrația este amortizată după un număr oarecare de cicluri. Frecvențele vibrațiilor libere depind de masa, rigiditatea și amortizarea din sistem, fiind independente de condițiile inițiale ale mișcării sau de forțe exterioare sistemului. De aceea se numesc *frecvențe proprii* sau frecvențe naturale de vibrație. Inversele acestora se numesc *perioade proprii* de vibrație. Pentru un anumit sistem, ele au valori constante bine definite. Când toate particulele unui corp vibrează într-o mișcare armonică sincronă, deformata dinamică este definită de o *formă proprie de vibrație*.

Vibrațiile forțate (întreținute) sunt produse de forțe perturbatoare care există independent de mișcare. În general, sarcinile exterioare sau deplasările sunt aplicate dinamic, deci sunt variabile în timp. Astfel de excitații implică un transfer de energie de la sursa perturbatoare periodică la sistem. Dacă transferul are loc periodic, constant pe fiecare ciclu, vibrația forțată este *staționară*, de amplitudine constantă. Dacă transferul se face neuniform, vibrația are caracter *tranzitoriu*, amplitudinea variind până la stabilirea unui regim staționar sau până la amortizarea completă.

Aplicarea bruscă a unei perturbații produce șocuri sau impacturi. *Șocul* este o perturbație prin care se transmite sistemului energie cinetică într-un interval de

timp scurt în comparație cu perioada sa proprie de oscilație. Răspunsul la un șoc este deci, din momentul încetării acțiunii, o vibrație liberă. *Excitația tranzitorie* este o perturbație care durează mai multe perioade de vibrație proprie ale sistemului.

Vibrațiile periodice și cele tranzitorii sunt fenomene deterministe, pentru care se pot stabili funcții de timp care să definească în orice moment valoarea instantanee a deplasării. În multe aplicații practice se întâlnesc vibrații *aleatoare*, cu caracter nedeterminist, la care valorile instantanee ale mărimilor care definesc mișcarea nu mai sunt predictibile. Se recurge la calculul probabilităților și se lucrează cu mărimi statistice sau valori medii, care în cazul proceselor staționare, ergodice și cu distribuție gaussiană devin predictibile.

În general, când asupra unui sistem liniar și cu parametri invariabili în timp se aplică o perturbație oarecare, mișcarea rezultantă este suma a două componente distincte: *vibrația forțată*, descrisă de o funcție asemănătoare funcției excitației și *vibrația proprie*, dependentă doar de caracteristicile dinamice ale sistemului, a cărei funcție de timp este de obicei o combinație între o sinusoidă și o exponențială.

În cazul unei perturbații armonice sau aleatoare staționare, vibrația proprie se amortizează imediat după începutul mișcării, rămânând doar vibrația forțată, care în anumite condiții poate produce *rezonanță*.

Dacă un sistem este acționat de o forță exterioară periodică, a cărei frecvență este egală cu (sau apropiată de) una din frecvențele proprii ale sistemului, vibrația produsă are amplitudini relativ mari chiar pentru amplitudini relativ mici ale forței perturbatoare. Se spune că sistemul este într-o stare de *rezonanță*. Un exemplu este leagănul împins la anumite intervale. Alte exemple includ vibrațiile sistemelor cu roți dințate la frecvența de angrenare, vibrațiile torsionale ale arborilor motoarelor cu ardere internă la frecvența aprinderilor din cilindri, vibrațiile rulmenților la frecvența trecerii bilelor peste un defect, etc.

Rezonanța ia naștere la frecvențele la care suma celor două energii “reactive” recuperabile – potențială și cinetică – este nulă, iar energia transmisă sistemului este egală cu energia disipată prin frecări. Fenomenul apare când spectrul de frecvențe al excitației acoperă un domeniu ce cuprinde frecvențele proprii ale sistemului.

La rezonanță o forță de amplitudine constantă produce un răspuns maxim, sau, pentru a menține un răspuns de amplitudine constantă, este necesară o forță minimă.

Rezonanța înseamnă amplitudini mari ale mișcării în anumite puncte sau părți ale sistemului în vibrație, însoțite de solicitări și tensiuni mari sau mișcări relative considerabile, care pot duce la ruperi prin oboseală, funcționare necorespunzătoare, uzură, trepidații, deci zgomot – cu acțiune nocivă asupra omului.

O rezonanță este definită de o frecvență, un nivel al răspunsului dinamic și o lățime a curbei de răspuns în frecvență. Evitarea regimurilor periculoase de vibrații din vecinătatea rezonanțelor se poate face prin: a) modificarea frecvențelor excitatoare; b) modificarea masei sau rigidității sistemului vibrator, pentru variația frecvențelor proprii; c) creșterea sau adăugarea amortizării, și d) atașarea unui absorbitor dinamic de vibrații.

Dacă mișcarea are loc în prezența unei surse de energie, pot apare *autovibrații* (vibrații autoexcitate). Mișcarea este întreținută de o forță periodică, creată sau determinată de mișcarea însăși, deși energia este furnizată în mod uniform de sursa exterioară. Când mișcarea se oprește, forța periodică dispare. Exemple cunoscute sunt vibrațiile corzii de vioară produse de arcuș, “scârțâitul” cretei pe tablă sau al balamalei unei uși, “țuitul” mașinilor unelte când sculele sunt ascuțite necorespunzător, “fluieratul” tramvaiului la curbe, vibrațiile liniilor electrice aeriene produse de vânt, etc.

În timpul vibrațiilor *la rezonanță* și al celor *autoexcitate*, sistemul vibrează la o frecvență proprie. În primul caz vibrațiile sunt forțate, deci au loc la frecvența excitatoare (sau multipli întregi ai acesteia, în cazul sistemelor neliniare). În al doilea caz, frecvența este independentă de orice stimul exterior.

Vibrațiile *parametrice* sunt produse de variația unui parametru dinamic al sistemului, rigiditatea sau inerția. Exemple sunt vibrațiile transversale ale rotoarelor de secțiune necirculară, pendulelor de lungime variabilă, sistemelor torsionale cu roți dințate, etc.

1.5 Amortizarea vibrațiilor

Amortizarea reprezintă disiparea energiei mecanice dintr-un sistem, de obicei prin transformare în energie termică. Pierderea energiei prin radiație, uneori definită ca amortizare geometrică, nu este tratată în această lucrare.

Mecanismele de amortizare frecvent utilizate sunt: a) frecarea uscată (coulombiană), în care amplitudinea forței de amortizare este independentă de viteză, b) amortizarea vâscoasă liniară, la care forța este proporțională cu viteza, c) amortizarea vâscoasă proporțională cu o putere a vitezei, și d) amortizarea structurală (histeretică, internă) în care forța este proporțională cu deplasarea. Amortizarea ereditară și cea dintre piesele cu jocuri sunt alte modele posibile.

Amortizarea coulombiană sau amortizarea prin frecare uscată este un mecanism de amortizare neliniară, produs de forțe de frecare care se opun mișcării. Forța de amortizare coulombiană are amplitudine constantă, fiind independentă de viteză, odată ce s-a depășit forța de frecare statică inițială. Energia disipată într-un ciclu de vibrație armonică este proporțională cu amplitudinea deplasării și independentă de pulsație.

Amortizarea vâscoasă liniară este produsă de frecarea relativă a moleculelor unui fluid vâscos, care produce forțe proporționale și de sens contrar vitezei unui obiect care se mișcă în fluid. Energia disipată într-un ciclu de vibrație armonică este proporțională cu frecvența și cu pătratul amplitudinii deplasării. Este cel mai simplu model de amortizare, frecvent utilizat datorită simplității matematice, în special pentru modelarea amortizării externe, produse de mișcarea în mediul ambiant.

Amortizoarele cu ulei din suspensia automobilelor și motocicletelor produc forțe proporționale cu o putere a vitezei relative. *Amortizarea proporțională cu o putere a vitezei* este un mecanism neliniar, în care energia disipată într-un ciclu de vibrație armonică depinde atât de pulsație cât și de amplitudinea vibrației.

S-a observat experimental că la multe materiale folosite curent în practică energia disipată într-un ciclu de vibrație armonică este proporțională cu pătratul amplitudinii deplasării dar este independentă de pulsație, deci modelul amortizării vâscoase liniare nu descrie corect comportarea acestor materiale. Aceeași constatare privește amortizarea produsă de mișcarea relativă a elementelor asamblate prin nituire sau cu șuruburi.

Amortizarea structurală sau *histeretică* este mecanismul de frecare de alunecare care descrie această comportare. Forța de amortizare este proporțională cu deplasarea relativă dar în fază cu viteza relativă. Acest model de frecare a fost postulat și este strict valabil doar în cazul vibrațiilor armonice. El nu reprezintă un mecanism de disipare a energiei realizabil fizic, deoarece în cazul solicitării în regim tranzitoriu conduce la rezultate absurde. În acest caz, valoarea instantanee a forței de amortizare depinde nu numai de variația în timp a deplasării până în momentul aplicării forței, dar și după acest moment (sistem necauzal). Totuși, în regim armonic și pe domenii limitate de frecvențe, modelul amortizării structurale dă rezultate bune, confirmate experimental pe structuri aeronautice.

Natura fizică a mecanismelor de amortizare este atât de diferită, încât pentru descrierea lor s-au elaborat mai multe modele matematice, majoritatea fiind neliniare, deci implicând dificultăți de calcul. S-a recurs la conceptul de *amortizare vâscoasă echivalentă*, prin care forța de amortizare neliniară se înlocuiește cu o forță vâscoasă liniară, astfel încât energia disipată pe ciclu de amortizor neliniar să fie egală cu cea disipată de un amortizor vâscos echivalent, supus la o deplasare relativă de aceeași amplitudine.

Generalizând noțiunea de amortizare echivalentă, calculul analitic al vibrațiilor mecanice este simplificat prin folosirea cu precădere a două modele de amortizare – vâscoasă și structurală. Se egalează deci energia disipată într-un ciclu de vibrație prin toate mecanismele de amortizare, inclusiv cea datorită radiației (prin unde, în medii continue infinite), cu energia disipată printr-un singur mecanism, vâscos sau histeretic, într-un regim de vibrații cu aceeași amplitudine. Rezultă astfel fie un *coeficient de amortizare vâscoasă echivalentă*, fie un *coeficient de amortizare structurală echivalentă*, mărimi dependente în general de

pulsație și amplitudinea deplasării, cu care se lucrează ca și când ar fi constante, urmând să se determine experimental domeniile în care această ipoteză este valabilă.

2.

SISTEME CU UN GRAD DE LIBERTATE

Sistemele vibratoare au masă și elasticitate. Cel mai simplu sistem vibrator constă dintr-o masă atașată de un arc liniar. Când mișcarea poate fi descrisă de o singură coordonată, sistemul are un singur grad de libertate. Utilizând acest model simplu, se pot introduce concepte de bază ca frecvența proprie, rezonanța, bătăile și antirezonanța. În timpul vibrațiilor, energia mecanică se disipează prin amortizare. Aceasta limitează amplitudinea mișcării la rezonanță, descrește amplitudinea vibrațiilor libere, și introduce defazaje între răspuns și excitație. Măsurarea amortizării este importantă deoarece ea nu poate fi calculată ca celelalte două proprietăți, masa și rigiditatea.

2.1 Vibrații libere neamortizate

Vibrația liberă a unui sistem masă-arc, care are loc în absența oricărei excitații exterioare, este o *mișcare armonică* a cărei frecvență depinde exclusiv de masa și rigiditatea sistemului, fiind independentă de condițiile inițiale ale mișcării. Fiind o proprietate intrinsecă (naturală) a sistemului, aceasta se numește *frecvență proprie* sau *frecvență naturală*. Calculul frecvențelor proprii se bazează pe valorile maselor și ale rigidităților elementelor elastice.

2.1.1 Sistemul masă-arc

Sistemul din fig. 2.1 constă dintr-un arc liniar de rigiditate k și o greutate W având masa $m = W/g$, unde g este accelerația gravitației. Greutatea este constrânsă să se deplaseze pe direcție verticală, fără să se rotească. Rigiditatea k este egală cu forța care produce o variație a lungimii arcului egală cu unitatea.

În fig. 2.1, *a* se arată arcul netensionat. Când masa m este atașată arcului (fig. 2.1, *b*), capătul acestuia se deplasează în jos și se oprește în poziția de echilibru static, determinată de deformația statică δ_{st} . În această poziție, greutatea

$W = mg$ care acționează în jos este echilibrată de forța din arc $k\delta_{st}$ care acționează în sus (fig. 2.1, c), astfel încât săgeata statică este

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k}. \quad (2.1)$$

Dacă masa este deplasată din poziția de echilibru static și lăsată liber, sistemul efectuează vibrații libere. Pentru a scrie ecuația mișcării, originea deplasărilor dinamice se alege în poziția de echilibru static, astfel încât trebuie luate în considerare doar forțele datorite deplasării față de această poziție.

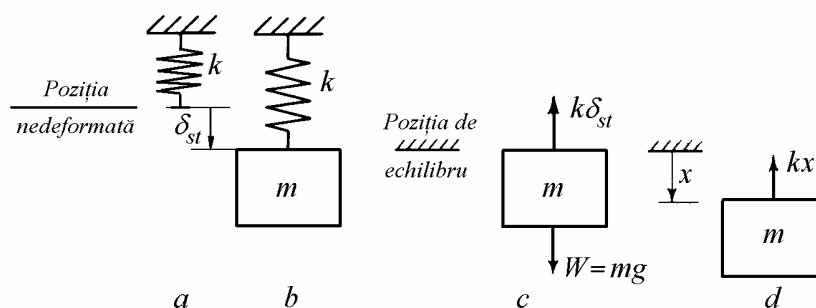


Fig. 2.1

Alegând sensul pozitiv în jos, forța elastică ce acționează asupra masei în poziția x este $-kx$ (fig. 2.1, d). Mișcarea masei este descrisă de legea a doua a lui Newton

$$m\ddot{x} = -kx,$$

care poate fi scrisă

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.2)$$

unde un punct deasupra literei denotă derivarea în raport cu timpul.

Relația (2.2) este o ecuație diferențială de ordinul doi, omogenă. Soluția generală are forma

$$x = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t, \quad (2.3)$$

unde

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad [\text{rad/s}] \quad (2.4)$$

este pulsația proprie neamortizată a sistemului.

Frecvența proprie neamortizată este

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad [\text{Hz}] \quad (2.5)$$

Constantele arbitrare C_1 și C_2 se determină pe baza condițiilor inițiale ale mișcării. În cazul general, sistemul poate porni din poziția x_0 cu viteza v_0 , astfel încât soluția generală devine

$$x = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t. \quad (2.6)$$

O altă formă a soluției generale este

$$x = A \sin(\omega_n t + \phi), \quad (2.7)$$

unde cele două constante arbitrare sunt date de

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_n)^2}, \quad \phi = \arctg \frac{\omega_n x_0}{v_0}. \quad (2.8)$$

Expresia (2.7) arată că vibrația liberă a sistemului masă-arc este armonică și are loc la frecvența proprie f_n . Mărimea A reprezintă *amplitudinea* deplasării față de poziția de echilibru static iar ϕ este *unghiul de fază*. Pulația ω_n definește frecvența vibrației în radiani pe secundă, 2π radiani corespunzând unui ciclu complet de vibrație.

Frecvența vibrației este egală cu numărul de cicluri de mișcare în unitatea de timp. Inversul frecvenței proprii este perioada proprie de vibrație

$$T = 1/f_n = 2\pi/\omega_n. \quad [\text{sec}] \quad (2.9)$$

Perioada vibrației este egală cu timpul necesar mișcării să se repete.

Frecvența proprie neamortizată se poate exprima în funcție de săgeata statică utilizând relația (2.1)

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}, \quad [\text{Hz}] \quad (2.10)$$

unde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ este accelerația gravitației.

2.1.2 Rigiditatea elementelor elastice

Deși sistemul cu un grad de libertate este de obicei modelat printr-o masă atașată de un arc cilindric elicoidal, în multe sisteme practice elementul elastic poate lua diferite forme sau poate consta din mai multe arcuri legate între ele.

În fig. 2.2 rigiditățile mai multor elemente elastice au fost calculate ca raport între forța aplicată și deplasarea punctului ei de aplicație.

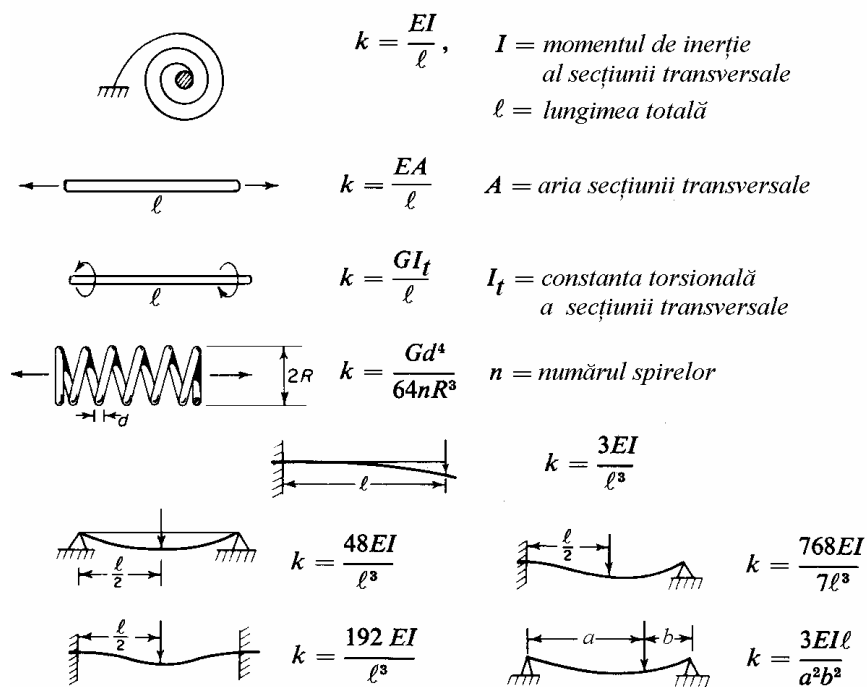


Fig. 2.2

În fig. 2.3 se prezintă două tipuri generale de combinații de arcuri.

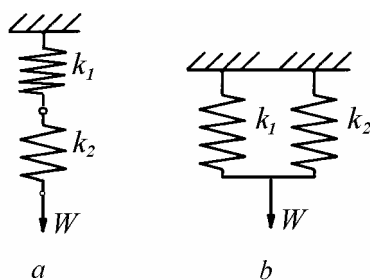


Fig. 2.3

La legarea în serie (fig. 2.3, a), în ambele arcuri acționează aceeași forță. Două arcuri liniare, de rigidități k_1 și k_2 , acționate de greutatea W , se deformează static

$$\delta_{st} = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2} = W \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right).$$

Rigiditatea echivalentă, reprezentând efectul combinat al arcurilor k_1 și k_2 , este

$$k_S = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}. \quad (2.11)$$

Un sistem cu n arcuri legate în serie are o rigiditate echivalentă k_S dată de

$$\frac{1}{k_S} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}. \quad (2.12)$$

La legarea în paralel (fig. 2.3, *b*) deformația ambelor arcuri este aceeași iar suma forțelor din arcuri este egală cu greutatea aplicată W :

$$W = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st}.$$

Astfel, pentru arcuri legate în paralel, rigiditatea echivalentă este

$$k_P = \frac{W}{\delta_{st}} = k_1 + k_2. \quad (2.13)$$

În general, un sistem cu n arcuri în paralel are o rigiditate echivalentă

$$k_P = k_1 + k_2 + \dots + k_n. \quad (2.14)$$

Regulile de compunere a rigidităților arcurilor sunt aceleași cu cele utilizate la calculul capacității totale a condensatoarelor legate în serie sau în paralel în circuitele electrice.

2.1.3 Sisteme torsionale

Se consideră sistemul torsional din fig. 2.4 care constă dintr-un disc cu un moment de inerție masic J , kg m^2 , atașat de o bară sau un fir de rigiditate la răsucire K , Nm/rad . Sistemul este constrâns să efectueze vibrații unghiulare în jurul axei verticale.

Dacă poziția instantanee a discului este dată de unghiul θ , cuplul care acționează asupra discului este $-K\theta$ astfel încât legea a doua a lui Newton pentru mișcarea unghiulară este

$$J\ddot{\theta} = -K\theta,$$

care se mai scrie

$$J\ddot{\theta} + K\theta = 0, \quad (2.15)$$

unde un punct deasupra literei denotă derivare în raport cu timpul.

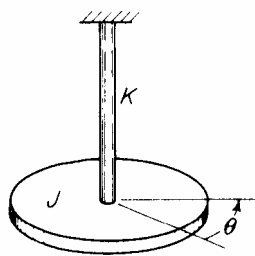


Fig. 2.4

Ecuția (2.15) a fost stabilită de Ch. O. Coulomb în 1784. Soluția generală are forma

$$\theta(t) = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t,$$

unde

$$\omega_n = \sqrt{K/J} \quad [\text{rad/s}] \quad (2.16)$$

este *pulsăția proprie neamortizată* a sistemului torsional.

Frecvența proprie neamortizată este

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{J}}. \quad [\text{Hz}] \quad (2.17)$$

Din *Rezistența materialelor* se știe că o bară de diametru d și lungime ℓ , dintr-un material cu modulul de elasticitate transversal G , sollicitată de un moment M_t se răsucește cu un unghi $\theta = \frac{M_t \ell}{GI_p}$, unde $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ este momentul de inerție polar al secțiunii transversale a barei. Rigiditatea la răsucire (torsională) este deci $K = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_p}{\ell}$.

Există o analogie directă între sistemele în vibrații de translație și cele în vibrații torsionale. Arcurile și masele din primul caz sunt înlocuite de arcuri torsionale și discuri rigide care au moment de inerție masic polar.

2.1.4 Metoda energetică

Dacă vibrația este armonică, atunci frecvența poate fi calculată printr-o metodă energetică. Când nu există disipare de energie, sistemul se numește *conservativ*. În orice moment, energia unui sistem conservativ este suma constantă a energiilor potențială și cinetică

$$U + T = \text{const.} \quad (2.18)$$

Energia potențială maximă, care apare în poziția de elongație maximă, unde masa stă pe loc un moment, trebuie să egaleze energia cinetică maximă, care apare atunci când masa trece prin poziția de echilibru static, cu viteză maximă.

Forța din arc este kx , iar lucrul mecanic efectuat pe o deplasare infinitesimală dx este $kx dx$. Energia potențială din arc, acumulată când un capăt al acestuia este deplasat pe o distanță x , este $U = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$. Presupunând o mișcare armonică de forma $x = A \sin \omega_n t$, energia potențială maximă este $U_{max} = \frac{1}{2} k A^2$.

Energia cinetică este în orice moment $T = \frac{1}{2} m v^2$. Viteza este $v = A \omega_n \cos \omega_n t$, astfel că energia cinetică maximă este $T_{max} = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2$.

Egalând energiile maxime $U_{max} = T_{max}$, rezultă $\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2$ de unde se obține pulsația proprie $\omega_n = \sqrt{k/m}$, independentă de amplitudinea A .

Exemplul 2.1

Să se determine pulsația proprie a oscilațiilor fluidului într-un tub în formă de U (fig. 2.5).

Rezolvare. Fie ℓ lungimea totală a coloanei de fluid, A - aria secțiunii transversale a tubului și ρ - densitatea fluidului.

Presupunând că particulele de fluid au aceeași viteză în orice moment, energia cinetică are expresia $T = \frac{1}{2} \rho A \ell \dot{x}^2$. Dacă fluidul oscilează în tub, lucrul mecanic efectuat este același ca și când o coloană de fluid de lungime x ar fi transferată din partea stângă în partea dreaptă a tubului, lăsând restul fluidului nemișcat.

Energia potențială instantanee este $U = g \rho A x^2$. Înlocuind expresiile celor două energii în condiția ca variația în timp a energiei totale să fie nulă

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

și simplificând cu \dot{x} , se obține ecuația diferențială a mișcării fluidului

$$\ddot{x} + \frac{2g}{\ell} x = 0.$$

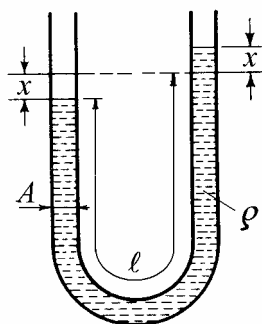


Fig. 2.5

Pulsația proprie

$$\omega_n = \sqrt{2g/\ell}$$

este independentă de natura fluidului utilizat, de forma și aria secțiunii transversale a tubului.

2.1.5 Metoda lui Rayleigh

Metoda lui Rayleigh este o aplicație a metodei energetice la sisteme cu masă/elasticitate distribuită. Metoda este utilizată pentru a reduce un sistem cu parametri distribuiți la un sistem echivalent masă-arc și pentru a determina pulsația proprie fundamentală a acestuia.

Energiile cinetică și potențială se calculează presupunând orice formă deformată care satisface condițiile la limită geometrice. Dacă se alege deformată reală sistemului, atunci formula lui Rayleigh va da pulsația proprie adevărată a sistemului. Pentru orice altă curbă, pulsația dată de această metodă va fi mai mare decât cea corectă. Aceasta se explică prin faptul că orice deviație de la curba adevărată implică niște constrângeri suplimentare, deci o rigiditate mai mare și o

pulsație mai înaltă. În continuare, metoda lui Rayleigh este aplicată vibrațiilor de încovoiere ale barelor.

Fie o bară cu modulul de rigiditate la încovoiere EI (unde E este modulul de elasticitate longitudinal și I este momentul de inerție axial al secțiunii transversale) și masa pe unitatea de lungime ρA (unde ρ este densitatea materialului și A este aria secțiunii transversale). Se presupune că deplasarea laterală este armonică, cu frecvența ω_1 , sincronă în toate punctele în lungul barei

$$y(x,t) = v(x) \cos \omega_1 t.$$

Energia potențială instantanee este

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

unde s-a utilizat ecuația diferențială liniarizată (4.65) a liniei elastice a barei $M = EI \left(\partial^2 y / \partial x^2 \right)$.

Valoarea sa maximă este

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Energia cinetică instantanee este

$$T = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \omega_1^2 \rho A \int y^2 dx,$$

cu valoarea maximă

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega_1^2 \int \rho A v^2 dx.$$

Egalând energia potențială maximă cu energia cinetică maximă, se obține formula lui Rayleigh pentru pulsația proprie fundamentală

$$\omega_1^2 = \frac{\int EI \left(\partial^2 v / \partial x^2 \right)^2 dx}{\int \rho A v^2 dx}. \quad (2.19)$$

Exemplul 2.2

Să se determine pulsația proprie fundamentală a barei în consolă din fig. 2.6.

Rezolvare. Se alege forma deformată aproximativă

$$v = v_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell} \right).$$

Această funcție satisface condițiile la limită $x=0$, $v=0$, $dv/dx=0$, și $x=\ell$, $d^2v/dx^2=0$, însă nu satisface condiția $x=\ell$, $d^3v/dx^3=0$ (forță tăietoare nulă), deci este o funcție admisibilă aproximativă.

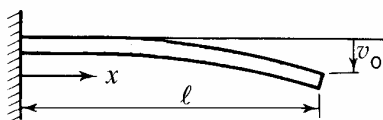


Fig. 2.6

Energia potențială maximă este $U_{max} = \frac{\pi^4}{64} \frac{EI}{\ell^3} v_0^2$. Energia cinetică maximă este $T_{max} = \rho A \omega_1^2 v_0^2 \ell \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \right)$, sau $T_{max} = \frac{\rho A}{2} \omega_1^2 v_0^2 \ell \cdot 0,23$.

Egalând cele două energii, se obține pulsația proprie fundamentală (în rad/s)

$$\omega_1 = \frac{3,6638}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$

Soluția adevărată (5.16) este $\omega_1 = \frac{3,515}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$, deci valoarea obținută cu formula lui Rayleigh este cu 4 % mai mare.

Dacă funcția admisibilă se alege deformată statică a barei în consolă acționată de o forță aplicată la capăt, la care se neglijează greutatea proprie

$$v = v_0 \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 \right],$$

energia potențială maximă este $U_{max} = \frac{3}{2} \frac{EI}{\ell^3} v_0^2 = \frac{1}{2} k v_0^2$ și energia cinetică maximă este $T_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{33\rho A \ell}{140} \right) \omega_1^2 v_0^2 = \frac{1}{2} m_{red} (\omega_1 v_0)^2$.

Egalând cele două energii, pulsația proprie fundamentală dată de formula lui Rayleigh este

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3EI/\ell^3}{(33/140)\rho A \ell}} = \sqrt{\frac{k}{m_{red}}} = \frac{3,5675}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

care este numai cu 1,47 % mai mare decât valoarea adevărată (5.16).

Relația de mai sus arată că, pentru deformata aproximativă considerată, bara cu masă uniform distribuită are aceeași pulsație proprie ca o bară fără masă distribuită dar cu o masă concentrată $(33/140)\rho A \ell$ în capătul liber. Aceasta se numește *masa redusă* a barei.

Exemplul 2.3

Să se determine pulsația proprie fundamentală a barei libere la capete din fig. 2.7.

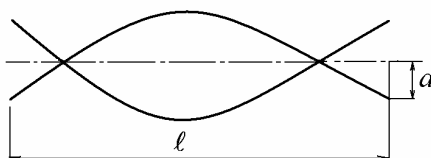


Fig. 2.7

Rezolvare. Se alege deformata aproximativă de forma

$$v = v_0 \sin \frac{\pi x}{\ell} - a.$$

Constanta a trebuie determinată din condiția de conservare a cantității de mișcare pentru bara liberă la capete

$$\int_0^{\ell} (\text{viteza}) \cdot d(\text{masa}) = \int_0^{\ell} (\omega v)(\rho A dx) = \omega \rho A \int_0^{\ell} v dx = 0,$$

de unde rezultă $a = 2v_0/\pi$.

Utilizând forma deformată

$$v = v_0 \left(\sin \frac{\pi x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \right),$$

din ecuația (2.19) se obține pulsația proprie fundamentală a barei

$$\omega_1 = \frac{22,6}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$

Valoarea adevărată (5.21, a) este $\omega_1 = \frac{22,4}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ deci discrepanța este doar 0,9 %.

2.2 Vibrații forțate neamortizate

Vibrațiile forțate sunt produse de forțe exterioare variabile în timp sau deplasări impuse. Dacă asupra masei acționează o forță armonică de amplitudine constantă și frecvență variabilă, atunci când frecvența excitatoare se apropie de frecvența proprie a sistemului, deplasarea masei crește nelimitat. Această condiție se numește *rezonanță* și este caracterizată de vibrații puternice. La sisteme neamortizate, frecvențele de rezonanță sunt egale cu frecvențele proprii ale sistemului și, în majoritatea cazurilor, funcționarea la rezonanță trebuie evitată. La sisteme amortizate, răspunsul la rezonanță are amplitudine finită.

Un leagăn împins la anumite intervale efectuează oscilații la rezonanță. Funcționarea utilajelor de compactare a terenului și a betonului, a transportoarelor oscilante, a uneltelor și a ciururilor vibratoare este adesea bazată pe rezonanță. Totuși principala problemă cu rezonanța este legată de efectele dăunătoare ale acesteia. Funcționarea la rezonanță implică deplasări și tensiuni mari, care produc oboseală și ruperi, efecte nocive sau disconfort utilizatorilor, și o descreștere a preciziei produselor. Zgomotul produs de o mașină casnică sau de un subansamblu al unui automobil poate fi o piedică în vânzarea acestora.

Dacă forța armonică este aplicată arcului, deplasarea punctului de excitație descrește la zero la frecvența proprie a sistemului. Această condiție se numește *antirezonanță*. În general, aceasta este o proprietate locală, dependentă de punctul de aplicație a excitației.

2.2.1 Excitarea masei cu o forță arbitrară

Fie forța $F(t)$ cu o variație arbitrară în timp (fig. 2.8).

În intervalul de timp infinitesimal $d\tau$, forța $F(\tau)$ poate fi considerată constantă. Suprafața hașurată reprezintă un impuls infinitesimal $F(\tau)d\tau$ care produce o variație de viteză

$$d\dot{x} = \frac{F(\tau)d\tau}{m}.$$

Răspunsul masei m produs de impulsul diferențial, de-a lungul întregii istorii de solicitare pentru $t > \tau$, este

$$dx = \frac{F(\tau)d\tau}{m} \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(t - \tau), \quad (2.20)$$

și poate fi dedus din (2.6) considerând că la $t = \tau$, deplasarea $x_0 = 0$ și viteza $v_0 = \dot{x}$.

Se poate considera că întreaga istorie de solicitare constă dintr-o succesiune de astfel de impulsuri infinitezimale, fiecare producând un răspuns diferențial de forma (2.20).

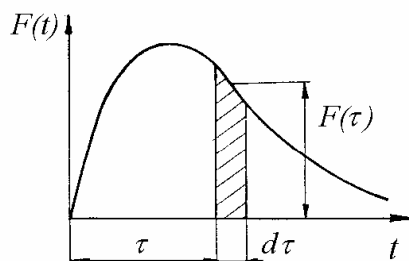


Fig. 2.8

Pentru un sistem liniar, răspunsul total se poate obține însumând toate răspunsurile diferențiale produse în timpul istoriei de solicitare, deci integrând expresia (2.20) după cum urmează

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau. \quad (2.21)$$

Relația (2.21) este cunoscută sub numele de *integrala lui Duhamel* pentru un sistem neamortizat.

2.2.2 Excitarea masei cu o forță armonică

Sistemul masă-arc din fig. 2.9, *a* este excitat de o forță armonică $f(t) = F_0 \cos \omega t$ de amplitudine constantă F_0 și pulsație perturbatoare ω , aplicată masei.

Pe baza diagramei forțelor din fig. 2.9, *b*, se scrie legea a doua a lui Newton

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos \omega t,$$

care devine ecuația diferențială a mișcării

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (2.22)$$

Soluția generală a ecuației liniare neomogene (2.22) este suma soluției (2.3) a ecuației cu membrul drept zero și a soluției particulare. În regim staționar, soluția particulară se alege de aceeași formă ca excitația

$$x_p(t) = X \cos \omega t, \quad (2.23)$$

unde X este amplitudinea răspunsului forțat.

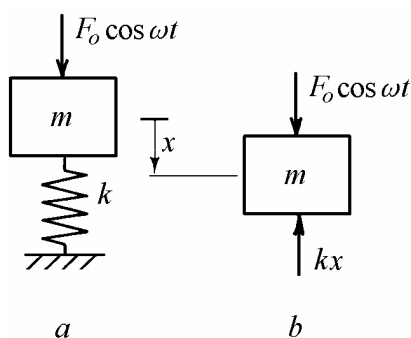


Fig. 2.9

Înlocuind soluția particulară (2.23), ecuația (2.22) devine

$$-m\omega^2 X \cos \omega t + kX \cos \omega t = F_0 \cos \omega t,$$

în care se poate simplifica $\cos \omega t$, rezultând

$$(k - m\omega^2)X = F_0,$$

sau

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - m\omega^2/k} = \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}. \quad (2.24)$$

În expresia (2.24)

$$X_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (2.25)$$

este săgeata statică a arcului produsă de forța (constantă) F_0 iar $\omega_n = \sqrt{k/m}$ este pulsația proprie neamortizată (2.4).

La pulsații $\omega \neq \omega_n$, soluția generală a ecuației (2.22) este

$$x(t) = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \cos \omega t. \quad (2.26)$$

Fiind suma a două componente armonice de pulsații diferite, soluția (2.26) nu reprezintă o mișcare armonică.

Dacă deplasarea inițială este x_0 și viteza inițială este v_0 , atunci din ecuația (2.26) se obține

$$x(0) = C_2 + \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = x_0, \quad \dot{x}(0) = C_1 \omega_n = v_0,$$

deci răspunsul total este

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left[x_0 - \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \cos \omega_n t + \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \cos \omega t. \quad (2.27)$$

Pentru condiții inițiale nule, $x_0 = v_0 = 0$, răspunsul (2.27) devine

$$x(t) = \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t). \quad (2.28)$$

2.2.3 Bătăi

Diferența cosinusurilor din relația (2.28) se poate exprima sub formă de produs

$$x(t) = \frac{2X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega_m t \sin \Delta \omega t, \quad (2.29)$$

unde

$$\omega_m = \frac{\omega_n + \omega}{2} \quad \text{și} \quad \Delta \omega = \frac{\omega_n - \omega}{2}.$$

Atunci când $\Delta \omega$ devine foarte mic, deoarece ω_m este relativ mare, produsul din expresia (2.29) reprezintă o oscilație modulată în amplitudine. Mișcarea armonică cu pulsația mai mare ω_m este modulată în amplitudine de mișcarea armonică cu pulsație mai joasă $\Delta \omega$ (fig. 2.10). Mișcarea rezultantă, care este o oscilație rapidă cu amplitudinea variabilă lent, este cunoscută sub numele de *bătăi*.

Terminologia derivă din acustică. Când două coarde de pian pentru aceeași notă sunt puțin dezacordate, se aude un sunet a cărui intensitate crește și scade periodic (bătăi). Bătăile dispar când corzile sunt acordate la unison, și se aude o singură frecvență.

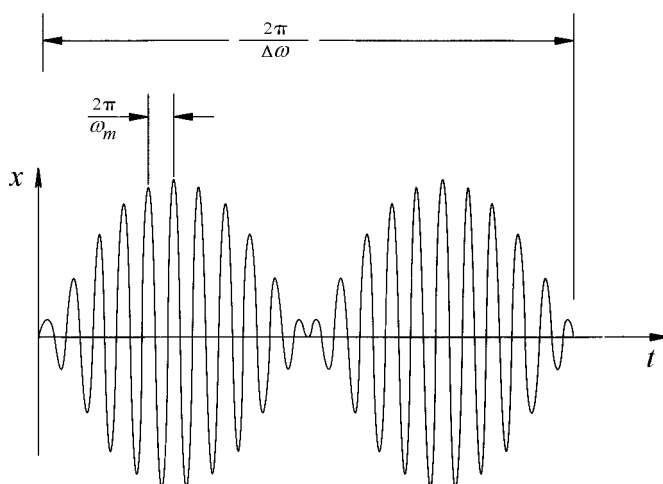


Fig. 2.10

Bătăile se pot auzi într-un avion bimotor, când cele două motoare au rotații puțin diferite. Ele apar în centrale electrice la pornirea unui generator. Puțin înainte de conectarea generatorului la rețea, frecvența curentului produs de generator este puțin diferită de frecvența rețelei. Zgomotul produs de generator și zgomotele produse de celelalte generatoare și transformatoare au înălțimi diferite și se pot auzi bătăile.

2.2.4 Curbe de răspuns în frecvență

Este interesant de examinat în detaliu dependența de frecvență a amplitudinii răspunsului staționar

$$X = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} X_{st} \quad (2.30)$$

Valoarea absolută a coeficientului lui X_{st} în membrul drept al relației (2.30) se numește *factor de amplificare dinamic*.

În fig. 2.11, a s-a reprezentat variația amplitudinii X în funcție de pulsația excitatoare ω . La pulsații $\omega < \omega_n$ ordonatele sunt pozitive, forța și deplasarea masei sunt în fază, în timp ce la pulsații $\omega > \omega_n$ ordonatele sunt negative, forța și deplasarea masei sunt defazate 180° (fig. 2.11, b). În timp ce pentru $\omega < \omega_n$ masa este sub poziția de echilibru static când forța acționează în jos, pentru $\omega > \omega_n$ masa este deasupra poziției de echilibru când forța acționează în jos.

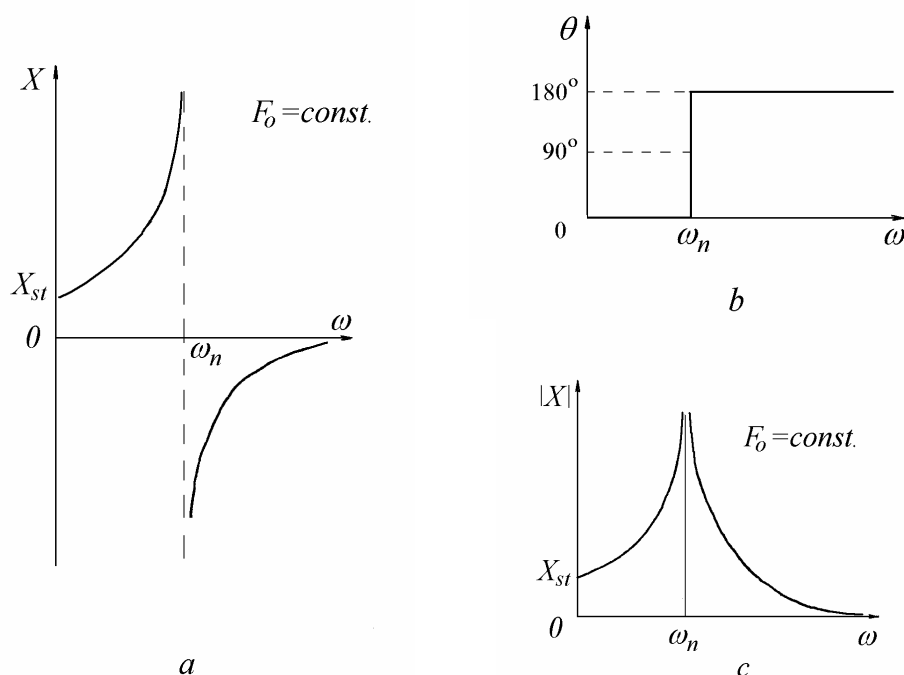


Fig. 2.11

De obicei relația de fază interesează mai puțin, iar curba de rezonanță este prezentată ca în fig. 2.11, *c* cu modulul amplitudinii pe axa ordonatelor. Această diagramă este denumită *curba de răspuns în frecvență*.

2.2.5 Rezonanța

La $\omega/\omega_n = 1$, când pulsația perturbatoare coincide cu pulsația proprie a sistemului, amplitudinea devine infinită (deoarece sistemul este neamortizat). Acest fenomen este numit “rezonanță”, iar pulsația proprie este uneori numită “pulsația de rezonanță”.

Atunci când $\omega = \omega_n$ forța elastică și forța de inerție se echilibrează reciproc iar forța excitatoare produce creșterea nelimitată a amplitudinii mișcării sistemului neamortizat. Sistemele amortizate au amplitudini finite la rezonanță iar defazajul între forță și deplasare este 90^0 (fig. 2.28).

Se consideră cazul în care, pornind din repaus, sistemul masă-arc este sollicitat de o forță $F_0 \cos \omega_n t$, unde ω_n este pulsația proprie. Atunci când ω

devine exact egal cu ω_n , soluția (2.27) nu mai este valabilă. Înlocuind $F(\tau) = F_0 \cos \omega_n \tau$ în ecuația (2.21) se obține

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^t \cos \omega_n \tau \sin \omega_n(t-\tau) d\tau,$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \left[\sin \omega_n t \int_0^t \cos^2 \omega_n \tau d\tau - \cos \omega_n t \int_0^t \cos \omega_n \tau \sin \omega_n \tau d\tau \right],$$

$$x_P(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \frac{t}{2} \sin \omega_n t. \quad (2.31)$$

Astfel, atunci când este excitat la rezonanță, amplitudinea sistemului neamortizat crește liniar în timp. Deoarece excitația este o funcție *cosinus* iar răspunsul este o funcție *sinus*, între ele există un defazaj de 90° .

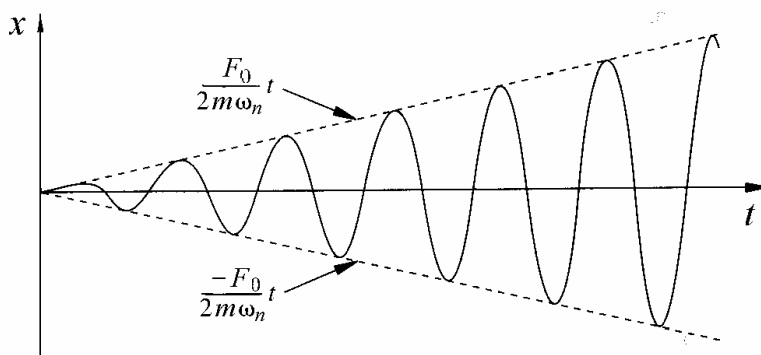


Fig. 2.12

Soluția totală pentru condiții inițiale nenule este în acest caz

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t + \frac{F_0}{2m\omega_n} t \sin \omega_n t. \quad (2.32)$$

Variația în timp a deplasării la rezonanță $x(t)$ este prezentată în fig. 2.12 pentru condiții inițiale nule. Se observă că $x(t)$ crește nelimitat, dar această creștere nu este instantanee ci necesită un anumit timp, funcție de masa și rigiditatea sistemului.

2.2.6 Trecerea prin rezonanță

Pentru majoritatea sistemelor vibratoare, valoarea staționară a amplitudinii deplasării se atinge relativ repede, viteza cu care se realizează contând mai puțin.

Totuși, atunci când un sistem vibrator este accelerat prin rezonanță, deci când frecvența excitatoare este baleiată cu o anumită viteză $\varepsilon = d\omega/dt$, nu mai este timp suficient pentru atingerea valorii staționare a deplasării și amplitudinea la rezonanță este finită chiar în cazul sistemelor neamortizate. Astfel, la trecerea prin rezonanță, interesează răspunsul la o forță cu frecvență variabilă.

În acest caz, înfășurătoarea răspunsului are un maxim ca un vârf de rezonanță, uneori urmat de bătăi. Dacă frecvența excitatoare crește (fig. 2.13), atunci frecvența la care apare răspunsul maxim este mai mare decât cea obținută în condiții staționare, amplitudinea maximă este mai mică și lățimea curbei de rezonanță este mai mare. Dacă frecvența excitatoare scade, frecvența la care apare răspunsul maxim este mai mică decât cea obținută în condiții staționare. În fig.

2.13, forța are o variație $f(t) = F_0 \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \frac{\pi}{2}\right)$ cu $\varepsilon = \text{const.}$

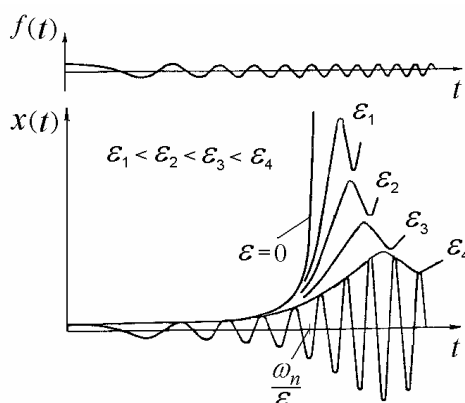


Fig. 2.13

Efectul vitezei de baleiaj depinde de amortizarea din sistem. Cu cât amortizarea este mai mică, cu atât este necesar mai mult timp pentru atingerea nivelului staționar al răspunsului. Figura 2.13 este trasată pentru amortizare nulă.

2.2.7 Rezonanța cu amplitudine constantă a deplasării

Rezonanța este o stare în care fie o deplasare maximă este produsă de o forță cu amplitudine constantă, fie o forță minimă este necesară pentru a menține o anumită deplasare constantă.

Când amplitudinea forței F este variabilă și amplitudinea deplasării X_0 este menținută constantă, relația (2.24) se poate scrie

$$F = k X_0 \left[1 - (\omega/\omega_n)^2 \right]. \quad (2.33)$$

În fig. 2.14 se prezintă variația valorii absolute a forței în funcție de pulsația excitatoare, pentru $X_0 = \text{const.}$ Pentru un sistem neamortizat, forța aplicată la rezonanță este zero, deoarece forța elastică este echilibrată de forța de inerție.

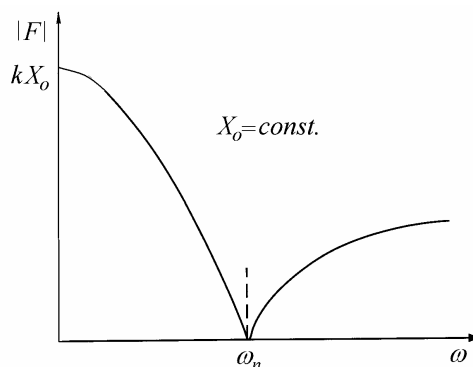


Fig. 2.14

Rezonanța este o stare în care o excitație minimă este necesară pentru a produce un răspuns dinamic maxim.

2.2.8 Excitația cu mase excentrice în rotație

În multe cazuri practice, vibrațiile apar sub acțiunea forțelor centrifuge produse de mase excentrice în rotație. Spre deosebire de forțele cu amplitudine constantă, considerate anterior, forțele produse de mase excentrice în rotație au amplitudini proporționale cu pătratul pulsației. Aceste forțe au forma $m_1 e \omega^2 \cos \omega t$, fiind proiecția verticală a forțelor centrifuge ce acționează asupra maselor $m_1/2$ în rotație cu viteza unghiulară ω și excentricitatea e (fig. 2.15, a).

Amplitudinea vibrațiilor forțate produse de această forță se poate obține înlocuind F_0 cu $m_1 e \omega^2$ în relația (2.24). Rezultă

$$X = \frac{m_1 e \omega^2}{k - m \omega^2} = \frac{m_1 e \omega^2 / k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = e \frac{(\omega/\omega_n)^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2}. \quad (2.34)$$

În expresia (2.34) m este masa totală în vibrație care include și masa m_1 .

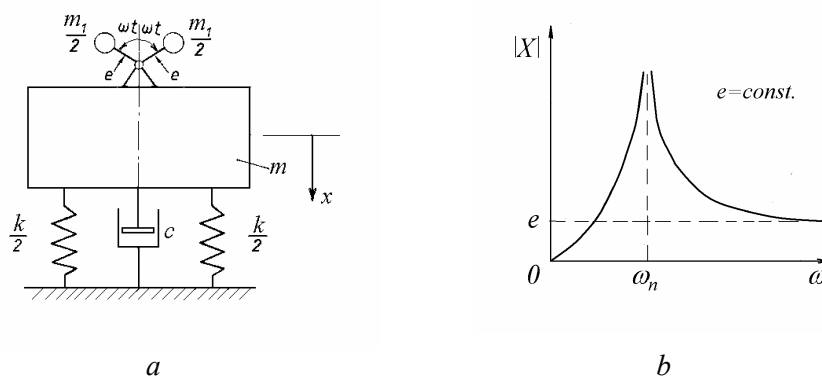


Fig. 2.15

În fig. 2.15, b se prezintă variația valorii absolute a amplitudinii X din relația (2.34) în funcție de pulsația ω , pentru $e = \text{const.}$ Diagrama pornește de la zero, tinde la infinit la rezonanță și descrește la valoarea e la pulsații înalte.

2.2.9 Antirezonanța

Fie sistemul masă-arc nerezemat din fig. 2.16, acționat de o forță armonică aplicată la bază. Ecuațiile de mișcare au forma

$$-m\ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1) = F_0 \cos \omega t.$$

Amplitudinea deplasării punctului de aplicație al forței este

$$X_1 = \frac{F_0}{k} \frac{k - m\omega^2}{m\omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{(\omega/\omega_n)^2}.$$

În cazul unei forțe de amplitudine constantă $F_0 = \text{const.}$, valoarea absolută a amplitudinii deplasării are o valoare minimă egală cu zero la pulsația proprie.

Această condiție este definită ca o *antirezonanță*, deoarece sistemul se comportă total diferit de rezonanță, unde amplitudinea este infinită. În general, antirezonanța are loc la o pulsație la care o forță de amplitudine maximă produce un răspuns de amplitudine minimă.

Spre deosebire de *rezonanță*, care este o proprietate *globală* a unui sistem în vibrație, independentă de poziția punctului de aplicație a excitației, *antirezonanța* este o proprietate *locală*, care depinde de poziția punctului de aplicație a excitației.

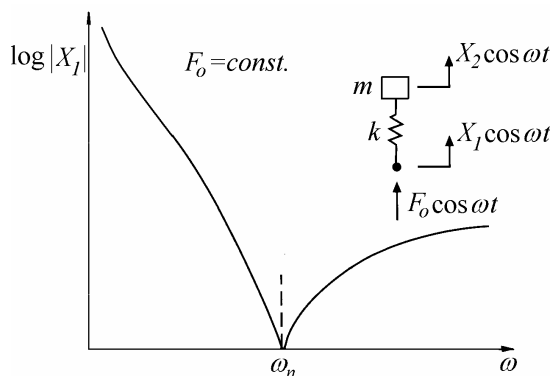


Fig. 2.16

În absența amortizării, pulsația de antirezonanță a sistemului masă-arc excitat la bază este aceeași ca pulsația de rezonanță a sistemului rezemat la bază și excitat prin masă. Dacă se atașează o a doua masă la bază, în punctul de aplicare al excitației, se obține un sistem masă-arc-masă al cărui răspuns în punctul de aplicare a excitației are pe lângă antirezonanță și o rezonanță.

2.2.10 Transmisibilitatea

Dacă la baza sistemului masă-arc se aplică o deplasare impusă (excitație cinematică) $x_1 = X_1 \cos \omega t$, atunci mișcarea transmisă masei $x_2 = X_2 \cos \omega t$ este definită de raportul amplitudinilor

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}. \quad (2.35)$$

Raportul $TR = |X_2|/X_1$ se numește *transmisibilitate* și este reprezentat grafic în fig. 2.17 în funcție de pulsația adimensională ω/ω_n .

Pentru valori $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, transmisibilitatea este subunitară ($TR < 1$) iar masa sistemului se spune că este izolată față de mișcarea bazei. Izolarea vibrațiilor este posibilă doar deasupra rezonanței, la pulsații $\omega > \sqrt{2}\omega_n$. Elementul elastic dintre masă și baza în vibrație poate fi proiectat astfel încât să asigure un anumit grad de izolare, impunând o anumită valoare TR . Aceasta arată în ce măsură mișcarea masei izolate este redusă față de cazul în care masa ar fi montată direct pe baza vibrantă.

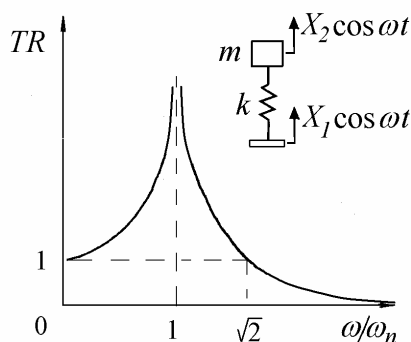


Fig. 2.17

2.2.11 Turația critică a rotorului Laval

Fie rotorul din fig. 2.18, compus dintr-un disc rigid, dispus la mijlocul unui arbore de masă neglijabilă, rezemat la capete în lagăre rigide, denumit *rotorul Laval*. Centrul de greutate G al discului se află la o distanță radială e de centrul său geometric C . Linia centrelor lagărelor intersectează planul discului în punctul O .

Când arborele este rotit în jurul axei lagărelor, discul se rotește în planul său în jurul centrului geometric C . Asupra discului acționează o forță centrifugă $m r_G \omega^2$, unde ω este viteza unghiulară de rotație, m este masa discului concentrată în G și $r_G = OG$. Această forță produce îndoirea arborelui, despre care se spune că este într-o stare de dezzechilibru. Arborele reacționează cu o forță de readucere elastică $k r_C$ aplicată în C , unde k este rigiditatea arborelui măsurată în dreptul discului și $r_C = OC$.

Neglijând efectul greutății proprii și al amortizării, discul este solicitat numai de aceste două forțe. Pentru a fi în echilibru, cele două forțe trebuie să fie coliniare, egale și de sens contrar

$$k r_C = m \omega^2 (r_C + e).$$

Rezolvând în funcție de r_C , se obține

$$r_C = \frac{m \omega^2 e}{k - m \omega^2} = \frac{e (\omega/\omega_n)^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2}, \quad (2.36)$$

unde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ este pulsația proprie a vibrațiilor transversale ale rotorului la viteză unghiulară nulă.

Această expresie reprezintă raza orbitei punctului C în precesie în jurul axei lagărelor cu viteza unghiulară ω . Deoarece simultan discul se rotește în jurul punctului C cu aceeași viteză unghiulară, mișcarea arborelui se numește *precesie sincronă*.

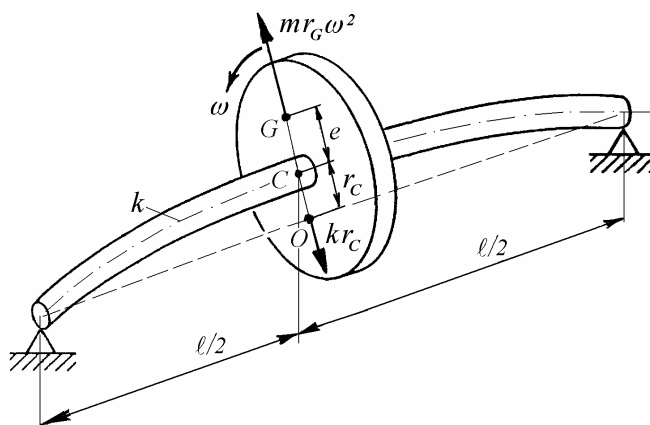


Fig. 2.18

Raza orbitei circulare a punctului G este

$$r_G = r_C + e = \frac{e}{1 - (\omega/\omega_n)^2}. \quad (2.37)$$

În fig. 2.19 se prezintă grafic variația razelor r_C (linie continuă) și r_G (linie întreruptă) în funcție de viteza unghiulară ω .

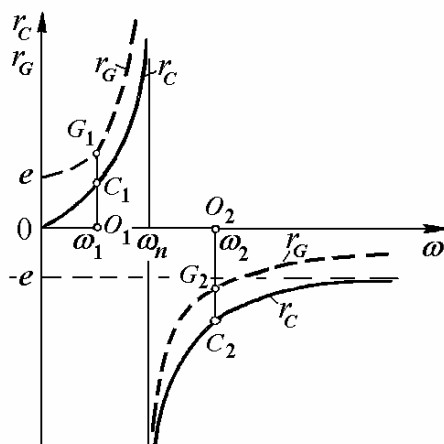


Fig. 2.19

La o viteză unghiulară $\omega_1 < \omega_n$ sistemul se rotește cu punctul G_1 în exteriorul punctului C_1 , în timp ce la viteze unghiulare $\omega_2 > \omega_n$ punctul G_2 se rotește în interiorul punctului C_2 . La viteze unghiulare foarte mari, $\omega \gg \omega_n$, raza r_C devine egală cu excentricitatea e , iar punctele O și G coincid, discul având o precesie în jurul centrului său de greutate.

La $\omega = \omega_n$, razele r_C și r_G cresc nelimitat. Turația $n_{cr} = 30 \omega_n / \pi$ se numește *turația critică* a arborelui. Relațiile (2.36) și (2.37) arată că viteza unghiulară critică a arborelui este egală cu pulsația proprie a vibrațiilor de încovoiere ale rotorului.

Variația bruscă a poziției relative a punctelor O , C și G la turația critică se datorește neglijării amortizării. La sistemele amortizate, când turația arborelui variază, segmentul CG se rotește continuu față de OC , astfel încât “punctul cel mai îndepărtat” (“high spot”) nu mai coincide cu “punctul greu” (“heavy spot”). La turația critică, unghiul între cele două segmente este 90° (v. § 2.4.11).

Deși există o analogie evidentă între expresiile (2.36) și (2.37) pe de o parte, și răspunsul staționar al unui sistem liniar masă-arc (2.30) și (2.34) pe de altă parte, mișcarea forțată a arborelui în rotație nu este o vibrație propriu-zisă. În arbore nu apar tensiuni ciclice, acesta se încovoie și ‘îndoitura’ este constantă la turație constantă. Deformația de încovoiere este maximă atunci când viteza unghiulară este egală cu pulsația vibrațiilor de încovoiere ale arborelui pe care acesta le-ar efectua dacă nu s-ar roti și ar executa doar vibrații laterale libere neamortizate.

2.3 Vibrații libere amortizate

În timpul vibrațiilor, energia mecanică se disipează prin frecări sau alte rezistențe. În prezența amortizării, amplitudinea vibrațiilor libere scade în timp iar pentru a menține constantă amplitudinea vibrațiilor trebuie aplicate forțe exterioare. În general, disiparea de energie este denumită *amortizare*. Ea este produsă de frecarea internă în materiale, de frecarea între componentele unei structuri, de interacțiunile fluid-structură, de radiație și de mișcarea în câmpuri electrice sau magnetice.

Cel mai simplu mecanism de amortizare se datorește mișcării într-un mediu vâcos. Forța de amortizare vâscoasă este proporțională cu viteza. Experiența a arătat că în structuri aeronautice disiparea de energie este mai bine reprezentată de amortizarea structurală. *Amortizarea structurală* sau *histeretică* este descrisă de o forță de amortizare în fază cu viteza dar proporțională cu deplasarea. Pentru a descrie mai bine comportarea unor sisteme vibratoare reale, s-

au imaginat mecanisme mai complicate de amortizare, cum ar fi *amortizarea ereditară*.

2.3.1 Amortizarea vâscoasă

Sistemul din fig. 2.20, *a* constă dintr-un arc liniar de rigiditate k , o masă m și un amortizor vâscos. Forța din amortizor este proporțională cu viteza și de semn opus. Factorul de proporționalitate se numește *coeficient de amortizare vâscoasă*, c , având unități $\text{N}/(\text{m/s})$.

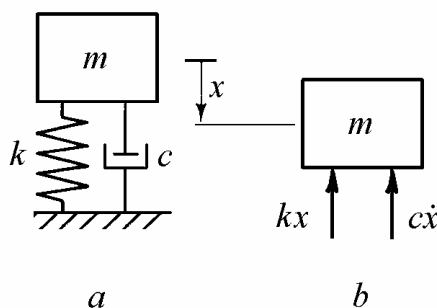


Fig. 2.20

În cazul vibrațiilor libere, ecuația diferențială a mișcării se obține utilizând diagrama forțelor din fig. 2.20, *b* și legea a doua a lui Newton

$$m \ddot{x} = -c \dot{x} - k x,$$

care mai poate fi scrisă

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0. \quad (2.38)$$

Presupunând soluții de forma $x = e^{st}$, se obține *ecuația caracteristică*

$$s^2 + \frac{c}{m} s + \frac{k}{m} = 0, \quad (2.39)$$

care are două rădăcini

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (2.40)$$

Soluția generală pentru vibrațiile libere amortizate este

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}, \quad (2.41)$$

în care constantele de integrare se determină din condițiile inițiale ale mișcării.

Ca o mărime de referință, se alege *amortizarea critică* definită de valoarea coeficientului c pentru care radicalul din expresia (2.40) este zero

$$\frac{c_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n,$$

$$\text{sau } c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n. \quad (2.42)$$

Amortizarea din sistem poate fi definită printr-o mărime adimensională, egală cu raportul între coeficientul de amortizare real și cel critic

$$\zeta = \frac{c}{c_c}, \quad (2.43)$$

denumit *raport de amortizare* (sau *fracțiune din amortizarea critică*)

Cu această notație, relația (2.40) devine

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n. \quad (2.44)$$

În continuare se consideră cele trei cazuri distincte pentru natura rădăcinilor (2.44), care pot fi reale diferite, complexe sau reale egale.

Cazul I: *Sistem amortizat subcritic*, $\zeta < 1$

Pentru $\zeta < 1$, expresia (2.44) se poate scrie

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2} \right) \omega_n. \quad (2.45)$$

Înlocuind rădăcinile (2.45) în soluția (2.41) rezultă

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} \right),$$

sau, utilizând formula lui Euler $e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$, după transformări se obține

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi\right). \quad (2.46)$$

Expresia (2.46) arată că mișcarea este oscilatorie cu amplitudine descrescătoare. Descrerea amplitudinii în timp este proporțională cu $e^{-\zeta\omega_n t}$, după cum se arată cu linii întrerupte în fig. 2.21.

Pulsația oscilației amortizate

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n \quad (2.47)$$

este mai mică decât *pulsația proprie neamortizată* ω_n și se numește *pulsație proprie amortizată* sau *pseudopulsație*. Dacă $\zeta \rightarrow 1$, ω_d tinde la zero și mișcarea nu mai este oscilatorie.

Relația (2.44) se poate scrie

$$s_{1,2} = -\sigma \pm i\omega_d \quad (2.48)$$

unde

$$\sigma = \zeta \omega_n \quad (2.49)$$

este un factor de amortizare egal cu viteza de descreștere a amplitudinii (panta tangentei la înfășurătoarea exponențială la $t = 0$), deci o *constantă de atenuare*.

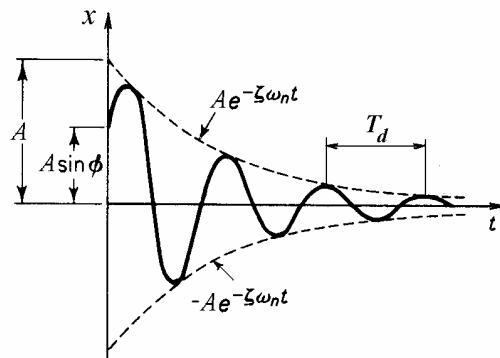


Fig. 2.21

Se pot stabili următoarele relații

$$\zeta = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2}}, \quad \omega_n = \frac{\sigma}{\zeta} = \sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2}. \quad (2.50)$$

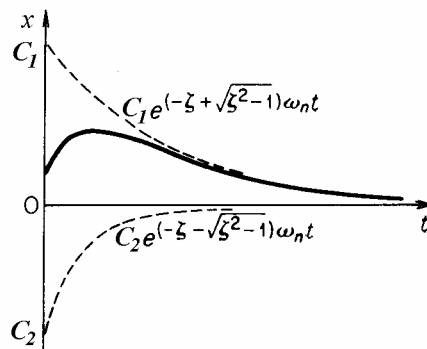


Fig. 2.22

Cazul II: Sistem amortizat supracritic, $\zeta > 1$

Pentru $\zeta > 1$, înlocuind rădăcinile (2.44) în (2.41) rezultă

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}.$$

Mișcarea nu mai este oscilatorie (Fig. 2.22) fiind denumită *aperiodică*.

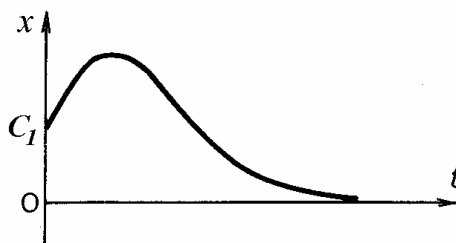


Fig. 2.23

Cazul III: Sistem amortizat critic, $\zeta = 1$

Amortizarea critică marchează tranziția de la mișcări oscilatorii la mișcări aperiodice. În acest caz limită, soluția generală este

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}.$$

Mișcarea este similară celei cu amortizare supracritică (fig. 2.23) dar revine la repaus în timpul cel mai scurt fără oscilații. Această proprietate este utilizată la aparatele electrice cu ac indicator, a căror parte mobilă este amortizată critic pentru a reveni cât mai repede pe valoarea măsurată.

2.3.2 Decrementul logaritm

O modalitate de determinare a amortizării într-un sistem în vibrație este măsurarea vitezei de descreștere a amplitudinii oscilațiilor. Aceasta se exprimă convenabil prin *decrementul logaritm*, definit ca logaritmul natural al raportului a două amplitudini succesive. În cazul amortizării vâscoase, acest raport este constant, indiferent de amplitudinile utilizate în calcul.

Se consideră vibrograma unei vibrații amortizate (fig. 2.24), descrisă de expresia (2.46).

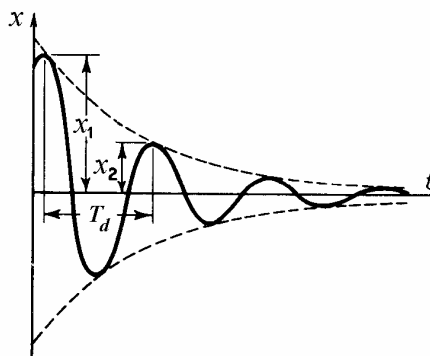


Fig. 2.24

Sinusoida cu amplitudini descrescătoare este tangentă la înfășurătoarea exponențială în puncte situate puțin la dreapta punctelor cu valori extreme ale amplitudinii, unde funcția sinus este egală cu 1. Întrucât această diferență este practic neglijabilă, raportul a două amplitudini succesive poate fi înlocuit cu raportul ordonatelor exponențialei calculate la distanță de o perioadă de oscilație

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{A e^{-\zeta \omega_n t}}{A e^{-\zeta \omega_n (t+T_d)}} = e^{\zeta \omega_n T_d},$$

unde perioada vibrației amortizate este

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d}.$$

Decrementul logaritmic este

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (2.51)$$

Pentru $\zeta \ll 1$, decrementul logaritmic este aproximativ $\delta \cong 2\pi\zeta$.

Uneori descreșterea amplitudinii după un singur ciclu de oscilație este prea mică pentru a fi măsurată corect și poate fi observată numai după n cicluri. Raportul amplitudinilor măsurat după n cicluri de oscilație este

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{x_0}{x_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} = (e^\delta)^n = e^{n\delta},$$

astfel încât decrementul logaritmic se poate calcula cu relația

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}. \quad (2.51, a)$$

Dacă amplitudinile succesive sunt reprezentate grafic în funcție de indicele ciclului pe o scară logaritmică, punctele se vor înscrie în lungul unei linii dreapte dacă amortizarea este vâscoasă, așa cum s-a presupus în ecuația (2.38).

În practică, se trasează întâi înfășurătoarele care trec prin punctele de amplitudine maximă, respectiv minimă (fig. 2.25, *a*). Se măsoară apoi distanța verticală între cele două înfășurătoare, în dreptul punctelor de maxim și minim ale vibrogramei. Aceste distanțe se reprezintă grafic pe o scară logaritmică în funcție de numărul de semicicluri de vibrație, apoi prin punctele obținute se trasează o linie dreaptă (fig. 2.25, *b*). Panta acestei drepte este utilizată apoi pentru calculul raportului de amortizare.

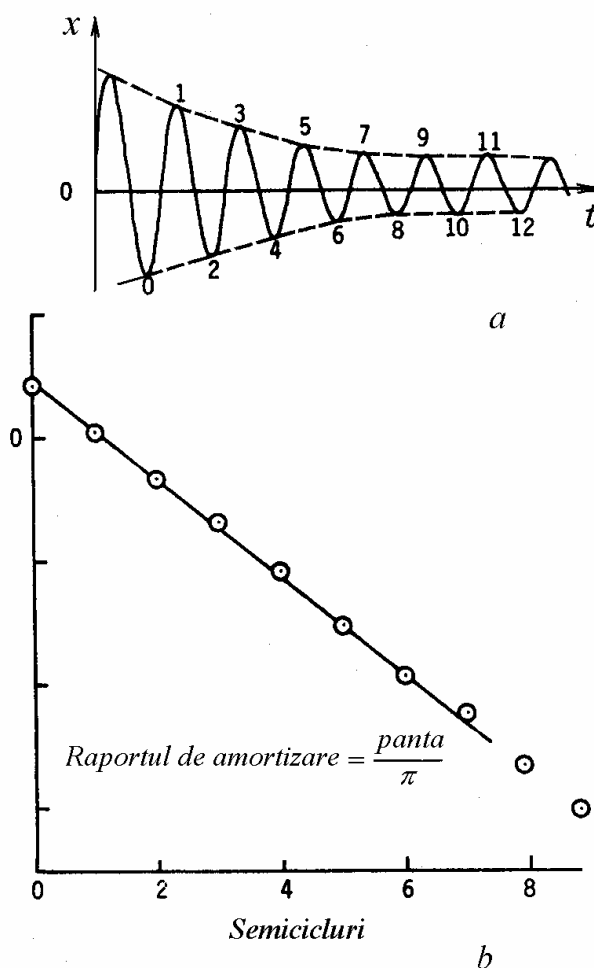


Fig. 2.25

Pentru $\zeta \ll 1$, logaritmând relația (2.51, *a*) se obține

$$\ln x_n = \ln x_0 - 2\zeta \pi \cdot n,$$

deci raportul de amortizare ζ este egal cu panta dreptei împărțită la 2π (sau la π , dacă se măsoară ordonatele maximelor și minimelor ca în fig. 2.25).

2.3.3 Factorul de pierderi

O măsură convenabilă a amortizării este *factorul de pierderi* definit ca raportul între energia disipată într-un ciclu de vibrație (sau energia ce trebuie suplinită sistemului pentru a menține vibrații de amplitudine constantă) ΔU și energia potențială maximă U , acumulată de sistem în ciclul respectiv

$$\eta = \frac{\Delta U}{U}. \quad (2.52)$$

În general, factorul de pierderi depinde de frecvența și amplitudinea vibrațiilor, putând fi calculat și pentru sisteme neliniare și sisteme cu parametri dependenți de frecvență.

Dacă x_1 și x_2 sunt două amplitudini consecutive într-o vibrație liberă amortizată, atunci energia acumulată în elementul elastic la aceste deplasări maxime este $U_1 = \frac{1}{2} kx_1^2$, respectiv $U_2 = \frac{1}{2} kx_2^2$. Pierderea de energie împărțită la energia inițială este

$$\frac{U_1 - U_2}{U_1} = 1 - \frac{U_2}{U_1} = 1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 1 - e^{-2\delta} \cong 2\delta$$

unde δ este decrementul logaritmic. Prin urmare, pentru amortizări mici, factorul de pierderi este aproximativ egal cu dublul decrementului logaritmic

$$\eta \cong 2\delta. \quad (2.52, a)$$

2.4 Vibrații forțate amortizate

În timpul vibrațiilor forțate amortizate, răspunsul este defazat în urma excitației datorită disipării de energie prin amortizare. Răspunsul are amplitudine finită la rezonanța de fază și este defazat 90° în urma excitației. Amplitudinea mișcării la rezonanță este dependentă de amortizare iar lățimea curbei de rezonanță este direct proporțională cu amortizarea din sistem. În cazul vibrațiilor armonice, diagrama deplasare-forță este o buclă de histerezis închisă, care pentru sisteme cu amortizare vâscoasă este o elipsă a cărei suprafață este o măsură a energiei disipate prin amortizare.

2.4.1 Vibrații staționare cu amortizare vâscoasă

Se consideră sistemul masă-arc-amortizor fixat la bază, solicitat de o forță armonică $F_0 \cos \omega t$ aplicată masei (fig. 2.26, *a*).

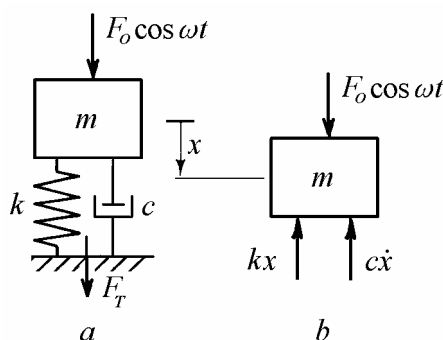


Fig. 2.26

Pe baza diagramei forțelor din fig. 2.26, *b* ecuația diferențială a mișcării se poate scrie sub forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (2.53)$$

Soluția completă a ecuației (2.53) constă din suma soluției (2.46) a ecuației omogene (2.38) și o soluție particulară care are forma funcției excitației din membrul drept.

Datorită amortizării, soluția omogenă se anulează în scurt timp, rămânând doar soluția particulară care descrie o mișcare armonică având aceeași frecvență ca forța excitatoare și un defazaj față de aceasta

$$x(t) = X \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.54)$$

Amplitudinea deplasării X și defazajul φ dintre deplasare și forță se obțin înlocuind soluția (2.54) în ecuația (2.53).

Deplasând toți termenii în membrul drept, se obține

$$m\omega^2 X \cos(\omega t - \varphi) + c\omega X \sin(\omega t - \varphi) - kX \cos(\omega t - \varphi) + F_0 \cos \omega t = 0.$$

Termenii din ecuația de mai sus reprezintă proiecții ale vectorilor forță pe o axă (orizontală) rotită cu unghiul ωt față de vectorul forței excitatoare (fig. 2.27).

Vectorul forței F_0 este rotit cu un unghi φ înaintea vectorului deplasare X . Forța elastică kX are sens opus deplasării, în timp ce forța de inerție $m\omega^2 X$

este în fază cu deplasarea. Forța de amortizare $c\omega X$ este rotită cu 90° față de forța elastică. În timpul vibrației, vectorii au poziții relative fixe și se rotesc împreună cu viteza unghiulară ω în sens trigonometric. Diagrama vectorilor rotitori (fazori) din fig. 2.27 este trasată pentru o pulsație excitatoare inferioară pulsației de rezonanță.

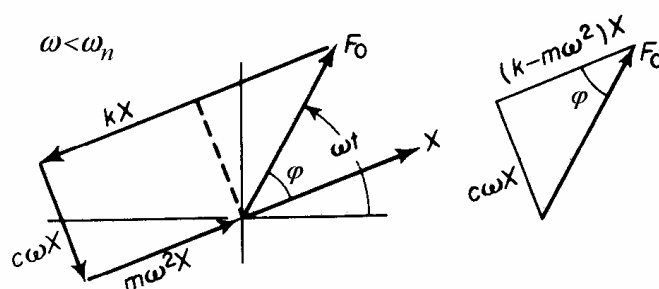


Fig. 2.27

Însumând proiecțiile vectorilor pe direcția deplasării și pe direcția perpendiculară pe aceasta, se obțin ecuațiile de echilibru dinamic

$$kX - m\omega^2 X = F_0 \cos \varphi, \quad c\omega X = F_0 \sin \varphi. \quad (2.55)$$

O componentă a forței excitatoare echilibrează forța de amortizare în timp ce cealaltă componentă este necesară pentru echilibrarea forței reactive, egală cu diferența între forța elastică și forța de inerție.

Rezolvând pentru X și φ se obține amplitudinea vibrațiilor forțate

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{X_{st}}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}, \quad (2.56)$$

și tangenta unghiului de fază

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}, \quad (2.57)$$

unde

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad \text{și} \quad \zeta = c/2\sqrt{km}.$$

Amplitudinea adimensională și unghiul de fază sunt reprezentate grafic în fig. 2.28 pentru $F_0 = \text{const.}$ și câteva valori ale raportului de amortizare ζ .

Diagramele amplitudine-frecvență se numesc *curbe de rezonanță* sau *curbe de răspuns în frecvență*. O astfel de curbă începe din punctul de ordonată X_{st} , atinge valoarea maximă la pulsația de rezonanță, descrește trecând prin valorile corespunzătoare pulsației proprii amortizate (2.47) și pulsației proprii neamortizate (2.4), tinzând asimptotic spre zero odată cu creșterea pulsației.

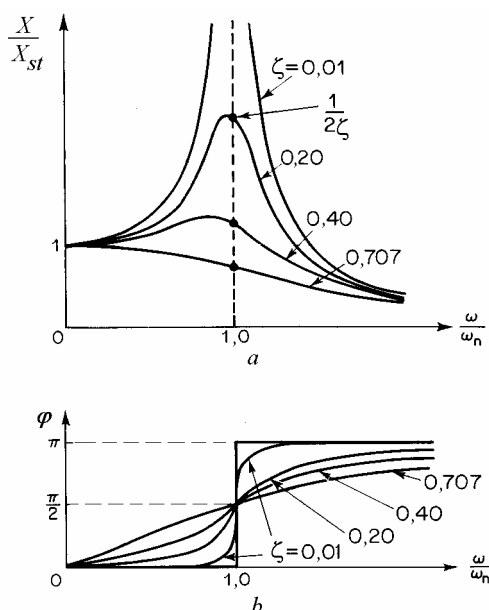


Fig. 2.28

Unghiul de fază dintre forța excitatoare și deplasare variază de la zero, la pulsație nulă, devine 90^0 la pulsația proprie neamortizată, apoi tinde asimptotic la 180^0 pe măsura creșterii pulsației. La amortizări reduse, se observă o variație rapidă a defazajului la trecerea prin pulsația proprie.

În cazul amortizării subcritice, curba răspunsului în frecvență (fig. 2.28, a) are un vârf de rezonanță, care se spune că apare la *frecvența (pulsația) de rezonanță*. Pentru valori $\zeta > 0,707$, vârful de rezonanță este complet aplatisat. Sistemele amortizate supracritic nu au rezonanțe.

Este important de notat că “rezonanța amplitudinii” este definită la pulsația $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ la care apare valoarea maximă $X_{max} = \frac{X_{st}}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$ a răspunsului staționar.

Prin definiție, “rezonanța fazei” apare la pulsația proprie neamortizată $\omega = \omega_n$ (când defazajul este 90°) la care amplitudinea deplasării este $X_{rez} = \frac{X_{st}}{2\zeta}$.

Pentru valori mici ale amortizării cele două rezonanțe coincid.

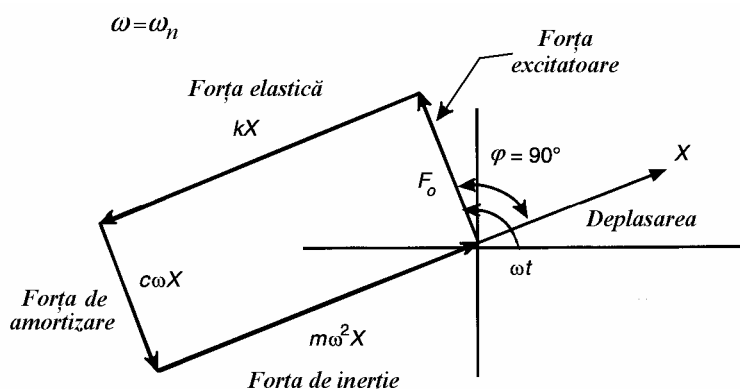


Fig. 2.29

Diagrama vectorială a forțelor la rezonanța de fază este prezentată în fig. 2.29. Forța elastică echilibrează forța de inerție a masei, iar forța excitatoare compensează doar forța de amortizare. Între masă și arc are loc un schimb continuu de energie cinetică și potențială. Forța exterioară ce trebuie aplicată pentru a menține sistemul în vibrație staționară este cea necesară pentru a suplini energia disipată prin amortizare.

La rezonanță, energia reactivă (din arc și masă) este zero iar energia activă (efectiv disipată) este maximă. Din acest motiv la rezonanță este necesară o forță minimă pentru a menține o anumită amplitudine a deplasării. Pe o diagramă a rigidității dinamice (forța necesară pentru a produce o deplasare egală cu unitatea în punctul de aplicație) în funcție de pulsația excitatoare, rezonanța este marcată de un minim (ca în fig. 2.14).

2.4.2 Diagrama deplasare-forță

Se consideră (pentru simplificarea prezentării) deplasarea armonică în regim staționar de forma

$$x(t) = X \cos \omega t, \quad (2.58)$$

defazată cu un unghi φ față de forța excitatoare aplicată masei

$$f(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.59)$$

Relațiile (2.58) și (2.59) sunt ecuațiile parametrice ale unei elipse. Eliminând timpul între cele două expresii rezultă

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{f^2}{F_0^2} - 2 \frac{x}{X} \frac{f}{F_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (2.60)$$

Diagrama deplasare-forță este o buclă de histerezis de formă eliptică (fig. 2.30), parcursă în sens trigonometric.

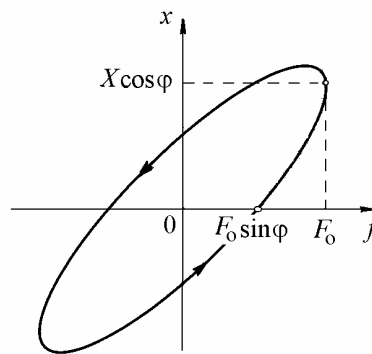


Fig. 2.30

Aria suprafeței acestei elipse este o măsură a energiei disipate într-un ciclu de vibrație. Aceasta este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța (2.59) pe deplasarea (2.58)

$$W_d = \int f dx = \int_0^{2\pi/\omega} f \frac{dx}{dt} dt = -X F_0 \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) \sin \omega t d(\omega t),$$

$$W_d = \pi F_0 X \sin \varphi.$$

Utilizând a doua ecuație (2.55), expresia de mai sus devine

$$W_d = \pi c \omega X^2. \quad (2.61)$$

Pentru a produce lucru mecanic, forța de amortizare $f_d = -c\dot{x} = \omega X \sin \omega t$ trebuie să fie defazată cu 90° față de deplasarea $x(t) = X \cos \omega t$.

Dacă deplasarea și forța sunt măsurate cu traductoare de vibrații și semnalele acestora sunt aplicate pe plăcile de deflecție ale unui osciloscop (deplasarea în ordonată și forța în abscisă) imaginea obținută pe ecran este o *figură Lissajous*. La frecvențe joase figura este o linie dreaptă, a cărei pantă depinde de raportul amplitudinilor celor două semnale (fig. 2.31, a). Pe măsura creșterii pulsației, linia dreaptă devine o elipsă (fig. 2.31, b) a cărei semiaxă mare crește cu

pulsația. La pulsația proprie neamortizată (fig. 2.31, *c*) semiaxa mare a elipsei este verticală și de amplitudine mare. La creșterea în continuare a pulsației, semiaxa mare continuă să se rotească dar descrește în amplitudine (fig. 2.31, *d*). Lățimea elipsei descrește până când, la pulsații mult deasupra rezonanței, elipsa degenerază din nou într-o linie dreaptă aproape paralelă cu axa orizontală (fig. 2.31, *e*).

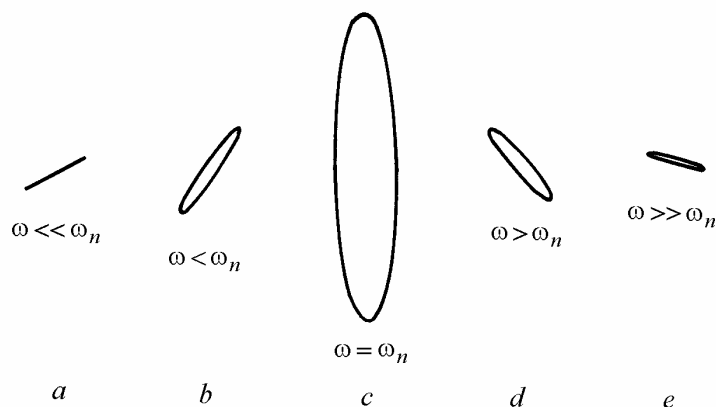


Fig. 2.31

La rezonanța fazei, $\omega = \omega_n$, $\varphi = 90^\circ$, $X_{res} = F_0 / 2\zeta k$, semiaxa mare a elipsei este verticală iar energia disipată prin amortizare este

$$W_d = \pi F_0 X_{res} = \pi c \omega_n X_{res}^2. \quad (2.62)$$

Energia disipată într-un ciclu de vibrație prin amortizare vâscoasă este proporțională cu pulsația excitatoare (ec. 2.61).

2.4.3 Amortizarea structurală

Experiențe cu structuri aeronautice și diferite materiale arată că energia disipată într-un ciclu de vibrație este independentă de pulsație și proporțională cu pătratul amplitudinii deplasării. Valorile amortizării în structuri ingineresti sunt relativ mici chiar la frecvențe de rezonanță înalte (de ordinul $\zeta = 0,02 - 0,05$). De asemenea, dacă toată amortizarea ar fi vâscoasă, atunci clopotele mici, care produc sunete înalte, ar reacționa la lovire cu un sunet înfundat, în locul unui clinchet. De aici rezultă că amortizarea vâscoasă, adoptată inițial datorită simplității matematice, trebuie înlocuită printr-un model în care energia disipată prin amortizare este independentă de frecvență. Acest tip de amortizare se numește *amortizare structurală* sau *histeretică*.

Utilizarea termenului amortizare “histeretică” este nepotrivită, deoarece toate mecanismele de amortizare conduc la o buclă de histerezis. De aceea în continuare se preferă termenul amortizare “structurală”. Acesta implică o forță de sens opus care este *în fază cu viteza* însă, spre deosebire de amortizarea vâscoasă, are o amplitudine care nu este *proporțională* cu viteza ci *cu deplasarea*. Coeficientul de amortizare este invers proporțional cu pulsația, astfel că forța de amortizare este $-h \dot{x}/\omega$ (în loc de $-c\dot{x}$). Ecuația (2.53) devine

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t, \quad (2.63)$$

unde h este un *coeficient de amortizare structurală*. Includerea pulsației ω în coeficientul vitezei \dot{x} implică faptul că soluțiile sunt valabile numai la această pulsație. Ecuația de mișcare se mai poate scrie utilizând o rigiditate complexă $k^* = k + ih$ (fiindcă s-a pus condiția de a avea o soluție armonică), sub forma

$$m\ddot{x} + (k + ih)x = F_0 e^{i\omega t}. \quad (2.64)$$

Deoarece c este înlocuit prin h/ω , energia disipată pe ciclu este

$$W_d = \pi h X^2, \quad (2.65)$$

fiind independentă de pulsație.

Expresiile (2.56) și (2.57) devin

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + h^2}} = \frac{X_{st}}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + g^2}}, \quad (2.66)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{k - m\omega^2} = \frac{g}{1 - (\omega/\omega_n)^2}, \quad (2.67)$$

unde $g = h/k$ este *factorul de amortizare structurală*.

2.4.4 Metoda punctelor de semi-putere

Curba de rezonanță a sistemului masă-arc-amortizor poate fi utilizată pentru determinarea raportului de amortizare (fig. 2.32).

La $\omega = \omega_n$ amplitudinea la rezonanță este $X_{rez} = \frac{X_{st}}{2\zeta}$. Pentru valori mici ale amortizării, vârful M coincide cu punctul care marchează rezonanța fazei.

Punctele B și C , de ordonată $(\sqrt{2}/2)X_{rez}$ se numesc *punctele de semi-putere*. Aceasta deoarece pătratul amplitudinii este $(1/2)X_{rez}^2$, deci puterea disipată prin amortizare la pulsațiile acestor puncte ω_1 și ω_2 , este jumătate din puterea disipată la rezonanță.

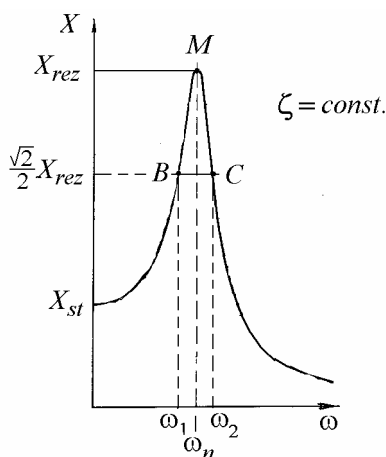


Fig. 2.32

Înlocuind în expresia (2.56) se obține

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\zeta} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}},$$

de unde rezultă ecuația

$$(\omega/\omega_n)^4 - 2(1 - 2\zeta^2)(\omega/\omega_n)^2 + (1 - 8\zeta^2) = 0.$$

Soluțiile ecuației sunt pulsațiile de semi-putere

$$(\omega/\omega_n)_{1,2}^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2},$$

care pentru amortizări mici $\zeta \ll 1$ pot fi approximate prin

$$(\omega/\omega_n)_{1,2}^2 \cong 1 \pm 2\zeta.$$

Notând

$$\omega_1^2 \cong \omega_n^2(1 - 2\zeta), \quad \omega_2^2 \cong \omega_n^2(1 + 2\zeta),$$

se obține

$$2\zeta \cong \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \quad (2.68)$$

sau

$$2\zeta \cong \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_n^2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} \frac{\omega_2 + \omega_1}{2\omega_n} \cong \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n},$$

deci raportul de amortizare este dat de expresia

$$\zeta \cong \frac{\Delta\omega}{2\omega_n}, \quad (2.69)$$

în care $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ este lățimea de bandă a curbei de rezonanță.

Pe baza formei curbei de rezonanță determinate experimental este dificil de stabilit dacă amortizarea este într-adevăr de tip vâscos. Dacă se consideră un singur grad de libertate și mișcarea este armonică, atunci este convenabilă utilizarea conceptului de “amortizare vâscoasă echivalentă”. În acest caz, coeficientul de amortizare vâscoasă are o astfel de valoare încât energia disipată într-un ciclu de deplasare armonică cu o anumită amplitudine și frecvență, este aceeași ca cea disipată prin mecanismul real de amortizare, în același ciclu de deplasare. În relația (2.43) coeficientul c este atunci *coeficientul de amortizare vâscoasă echivalentă*.

2.4.5 Metoda masei adiționale

În vecinătatea unei rezonanțe izolate, comportarea unui sistem vibrator oarecare se aseamănă răspunsului unui sistem cu un grad de libertate. Masa și rigiditatea sistemului echivalent pot fi determinate experimental prin *metoda masei adiționale*.

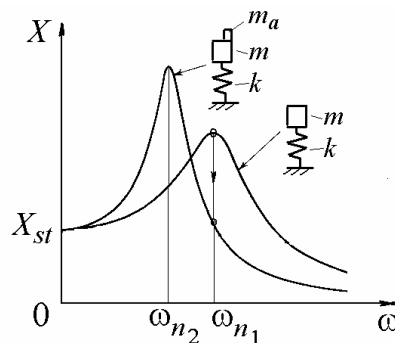


Fig. 2.33

Se trasează experimental două curbe de răspuns în frecvență, una pentru sistemul real, cealaltă pentru sistemul în care s-a adăugat o masă adițională

cunoscută m_a (fig. 2.33). Pulsațiile proprii ω_{n1} și ω_{n2} se determină în punctele cu amplitudine maximă a deplasării.

Din relațiile corepunzătoare (2.4)

$$k = m \omega_{n1}^2, \quad (2.70)$$

$$k = (m + m_a) \omega_{n2}^2, \quad (2.71)$$

se poate obține masa echivalentă

$$m = \frac{m_a}{\left(\omega_{n1}^2 / \omega_{n2}^2\right) - 1}, \quad (2.72)$$

apoi, din relația (2.70), rigiditatea echivalentă k .

De notat că răspunsul la rezonanță al sistemului cu masa atașată este mai mare deoarece pentru sistemul real

$$X_{rez_1} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\zeta_1} = \frac{F_0}{c\omega_{n1}} = \frac{F_0}{c} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

iar pentru sistemul cu masa atașată

$$X_{rez_2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\zeta_2} = \frac{F_0}{c\omega_{n2}} = \frac{F_0}{c} \sqrt{\frac{m + m_a}{k}}.$$

Dacă pulsația de lucru este în vecinătatea valorii ω_{n1} , atunci amplitudinea răspunsului forțat al sistemului poate fi micșorată adăugând o masă m_a .

2.4.6 Rezolvarea prin algebra complexă

În cazul excitației armonice, forța care acționează asupra masei sistemului din fig. 2.26 se poate scrie

$$f(t) = F_0 e^{i\omega t}, \quad (2.73)$$

astfel încât soluția staționară (2.54) devine

$$x(t) = \bar{X} e^{i\omega t}, \quad (2.74)$$

unde

$$\bar{X} = X e^{i\theta} = X_R + iX_I \quad (2.75)$$

este *amplitudinea complexă a deplasării*.

În relația (2.75), X este modulul, θ este unghiul de fază, X_R este componenta reală (în fază) și X_I este componenta imaginară (în cuadratură)

$$X_R = X \cos \theta, \quad X_I = X \sin \theta, \quad (2.76)$$

$$X = \sqrt{X_R^2 + X_I^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = X_I / X_R. \quad (2.77)$$

În cazul amortizării structurale, ecuația mișcării (2.63) devine

$$m \ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}. \quad (2.78)$$

Înlocuind (2.73) și (2.74) în (2.78) se obține

$$\left(-m\omega^2 + ih + k\right)\bar{X} = F_0.$$

Amplitudinea complexă \bar{X} are expresia

$$\bar{X} = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + ih} = \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + ig}, \quad (2.79)$$

unde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ și $g = h/k$, astfel încât

$$X_R = \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + g^2}} X_{st}, \quad X_I = \frac{-g}{\sqrt{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + g^2}} X_{st} \quad (2.80)$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + g^2}} X_{st}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-g}{1 - (\omega/\omega_n)^2}. \quad (2.81)$$

Eliminând pulsația ω între expresiile componentelor X_R and X_I rezultă

$$\left(X_I + \frac{1}{2g} X_{st}\right)^2 + X_R^2 = \left(\frac{1}{2g} X_{st}\right)^2. \quad (2.82)$$

Acest cerc este locul geometric al vârfului vectorului deplasării în planul complex.

2.4.7 Funcțiile răspunsului în frecvență

După cum răspunsul este o deplasare, viteză sau accelerație, există mai multe funcții de răspuns în frecvență (FRF) definite ca rapoarte complexe răspuns/excitație sau excitație/răspuns. Următoarele definiții sunt aproape general acceptate și chiar standardizate :

deplasare / forță = receptanță,

viteză / forță = mobilitate,

accelerație / forță = accelerație (inertanță),

forță / deplasare = rigiditate dinamică,

forță / viteză = impedanță mecanică,

forță / accelerație = masă aparentă.

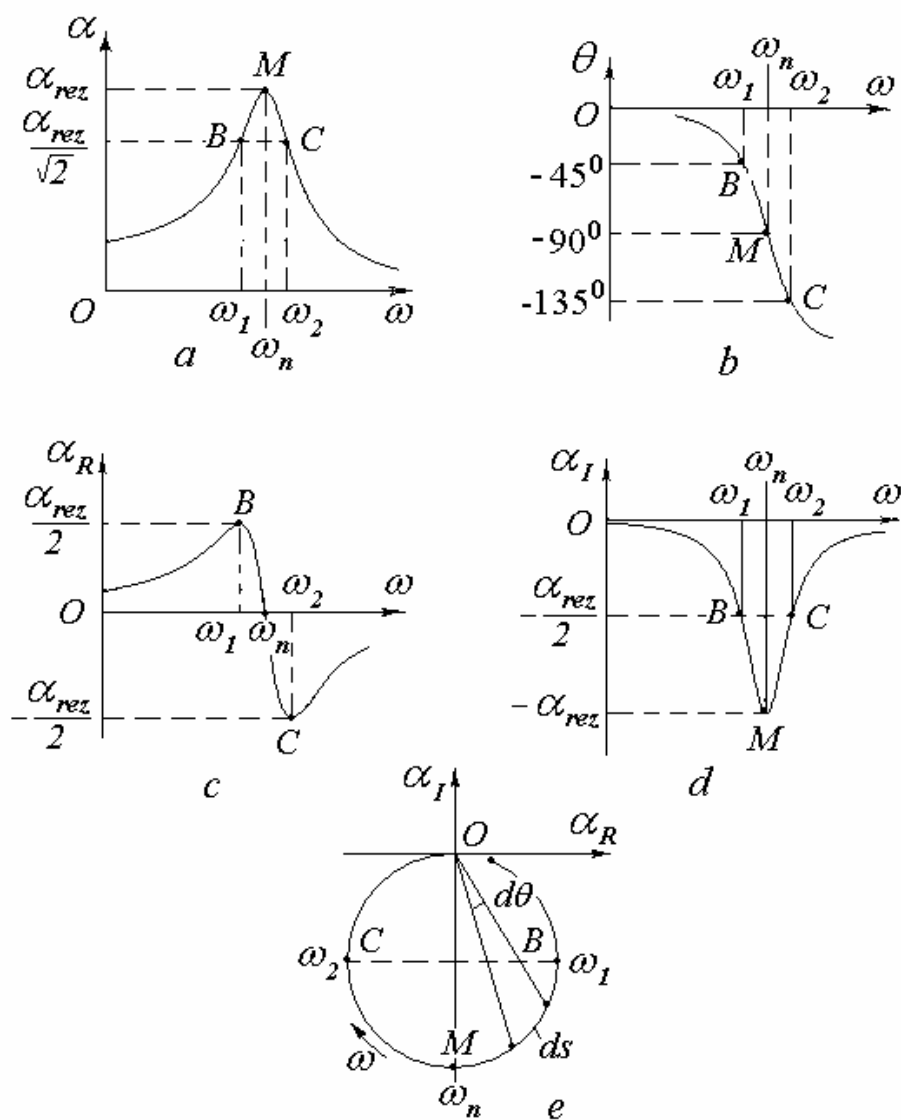


Fig. 2.34

Datorită caracterului armonic al mărimilor considerate, aceste funcții conțin de fapt aceeași informație despre sistemul în vibrație, putându-se stabili relații simple între ele.

În general, se folosesc trei tipuri de diagrame:

a) diagrame Bodé ale modulului FRF în funcție de frecvență și ale unghiului de fază al FRF în funcție de frecvență;

b) diagrame ale părții reale a FRF în funcție de frecvență și ale părții imaginare a FRF în funcție de frecvență;

c) diagrame Nyquist ale părții imaginare a FRF în funcție de partea reală a FRF, cu marcarea frecvenței în lungul curbei.

Pentru un sistem cu amortizare structurală, în fig. 2.34 se prezintă diagramele *receptanței* $\bar{\alpha} = \bar{X}/F_0$ pentru o valoare dată a factorului de amortizare. Rezonanța apare în punctul M , iar punctele de semi-putere sunt notate B și C .

Diagrama Nyquist (fig. 2.34, *e*) este un cerc. Ea conține într-un singur grafic informația asupra amplitudinii și unghiului de fază. În vecinătatea rezonanței scara frecvențelor este ‘dilatată’, astfel încât răspunsul între punctele de semi-putere este reprezentat pe un semicerc, indiferent de nivelul amortizării. Scăderea amortizării duce la creșterea diametrului cercului (pentru aceeași scară a amplitudinii) și la expandarea scării frecvențelor.

Rezonanța este indicată de maxime în diagramele α (fig. 2.34, *a*) și $|\alpha_I|$ (fig. 2.34, *d*), și prin puncte de inflexiune (pantă maximă sau valoare maximă a derivatei în raport cu ω^2) în diagramele θ (fig. 2.34, *b*) și α_R (fig. 2.34, *c*). Vârful în diagrama $|\alpha_I|$ este mai ascuțit decât în diagrama α . La rezonanță, $\theta = -90^\circ$ și $\alpha_R = 0$. În diagrama Nyquist (fig. 2.34, *e*), rezonanța apare la intersecția cercului cu axa imaginară, în punctul unde viteza de variație a lungimii arcului de cerc în raport cu frecvența este maximă. Aceasta se bazează pe observația că derivata

$$\frac{ds}{d(\omega^2/\omega_n^2)} = -\frac{1}{h} \frac{d\theta}{d(\omega^2/\omega_n^2)} = \frac{1}{k \left[\left(1 - \omega^2/\omega_n^2\right)^2 + g^2 \right]} = k \alpha^2 \quad (2.83)$$

are o valoare maximă la rezonanță. Dacă sistemul este excitat cu o forță armonică iar receptanța este reprezentată grafic prin puncte, corespunzătoare unor creșteri egale ale pulsației $\Delta\omega$, atunci lungimea arcului Δs între două puncte succesive este maximă la rezonanță. Această proprietate formează baza teoretică a metodei dezvoltate de Kennedy și Pancu (1945) pentru localizarea rezonanței.

Factorul de amortizare structurală se poate calcula cu relația (Broadbent și Hartley, 1958)

$$g = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \quad (2.84)$$

unde ω_1 și ω_2 sunt pulsațiile punctelor de extrem din diagrama $\alpha_R(\omega)$ sau ale capetelor diametrului BC , trasat perpendicular pe OM , în diagrama Nyquist.

Rigiditatea se poate calcula pe baza valorii receptanței α_{rez} la rezonanță

$$k = \frac{1}{g} \frac{1}{\alpha_{rez}} = \frac{1}{g} \frac{F_0}{X_{rez}}. \quad (2.85)$$

Deoarece în planul complex viteza este defazată 90° înaintea deplasării și accelerația este defazată 90° înaintea vitezei, diagramele Nyquist ale mobilității și accelerației sunt rotite 90° și respectiv 180° în sens trigonometric față de diagrama polară a receptanței.

Diagrama Nyquist a mobilității $\bar{M} = i\omega \bar{X}/F_0 = M_R + iM_I$, care nu este un cerc, este prezentată în fig. 2.35, *a*, fiind descrisă de următoarea ecuație

$$\left(M_R^2 + M_I^2\right)^2 - \frac{M_R^2}{g^2 k m} + \frac{M_R M_I}{g k m} = 0.$$

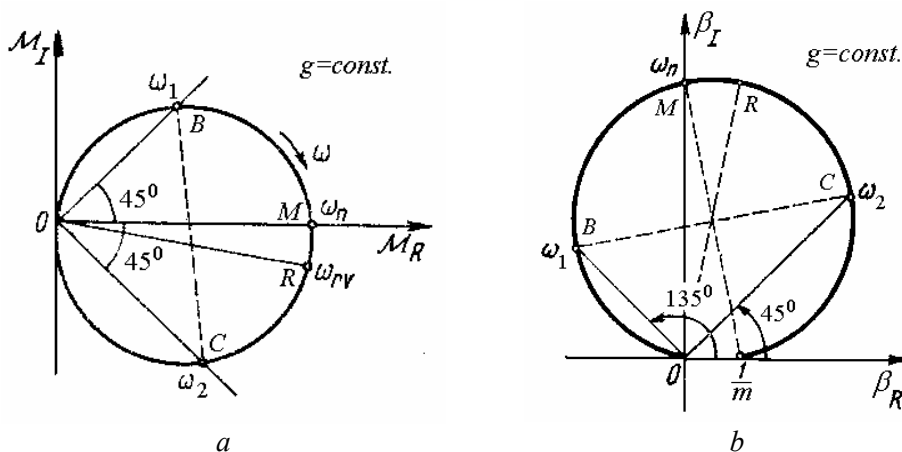


Fig. 2.35

Diagrama Nyquist a accelerației $\bar{\beta} = -\omega^2 \bar{X}/F_0 = \beta_R + i\beta_I$ este prezentată în fig. 2.35, *b*, fiind un cerc de ecuație

$$\left(\beta_R - \frac{1}{2m}\right)^2 + \left(\beta_I - \frac{1}{2gm}\right)^2 = \frac{1+g^2}{4g^2m^2}.$$

În ambele figuri s-au marcat punctele de semi-putere B și C, și punctul de amplitudine maximă a răspunsului R.

2.4.8 Diagrama polară a receptanței pentru amortizare vâscoasă

Receptanța este exprimată prin raportul între amplitudinea complexă a deplasării \bar{X} și amplitudinea forței armonice F_0 . Utilizând, în locul lui \bar{a} , notația generală pentru o funcție de răspuns în frecvență $H(i\omega)$, în cazul amortizării vâscoase se obține

$$H(i\omega) = \frac{\bar{X}}{F_0} = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega c} = \frac{1/m}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n}. \quad (2.86)$$

La sisteme cu amortizare vâscoasă, diagrama Nyquist a receptanței nu mai este un cerc, ceea ce constituie un dezavantaj la identificarea parametrilor sistemului. Totuși, se poate arăta că aceasta poate fi descompusă în două cercuri.

Relația (2.86) se poate scrie sub forma

$$H(i\omega) = \frac{1/m}{(i\omega - s_1)(i\omega - s_2)}, \quad (2.87)$$

unde $s_{1,2} = -\sigma \pm i\omega_d$ (2.48) sunt rădăcinile ecuației caracteristice (2.39).

Relația (2.87) se poate scrie ca o sumă de fracții parțiale

$$\frac{1/m}{(i\omega - s_1)(i\omega - s_2)} = \frac{C_1}{i\omega - s_1} + \frac{C_2}{i\omega - s_2}. \quad (2.88)$$

Înmulțind ambii membri ai relației (2.88) cu $(i\omega - s_1)$ și calculând rezultatul pentru $i\omega = s_1$ se obține

$$\left. \frac{1/m}{(i\omega - s_2)} \right|_{i\omega=s_1} = C_1 + C_2 \left. \frac{i\omega - s_1}{i\omega - s_2} \right|_{i\omega=s_1}.$$

Prin urmare

$$C_1 = \frac{1/m}{s_1 - s_2} = \frac{1/m}{(-\sigma + i\omega_d) - (-\sigma - i\omega_d)} = \frac{1/m}{i2\omega_d}$$

și similar

$$C_2 = -\frac{1/m}{i2\omega_d}.$$

Extrăgând un factor constant $\frac{1}{2i}$ din expresia lui C_1 și C_2 , expresia

(2.88) se poate scrie sub forma

$$H(i\omega) = \frac{R}{2i(i\omega - s_1)} - \frac{R^*}{2i(i\omega - s_2)}, \quad (2.89)$$

unde steluța denotă conjugata complexă.

În acest caz, reziduurile sunt pur reale

$$R = R^* = \frac{1/m}{\omega_d}. \quad (2.90)$$

La sisteme cu mai multe grade de libertate, acestea sunt complexe conjugate.

Expresia (2.89) se poate scrie

$$H(i\omega) = \frac{U}{\sigma + i(\omega - \omega_d)} + \frac{U^*}{\sigma + i(\omega + \omega_d)}. \quad (2.91)$$

unde

$$U = -U^* = -i \frac{1}{2m\omega_d}. \quad (2.92)$$

În continuare se va analiza diagrama Nyquist obținută pe baza expresiei (2.91).

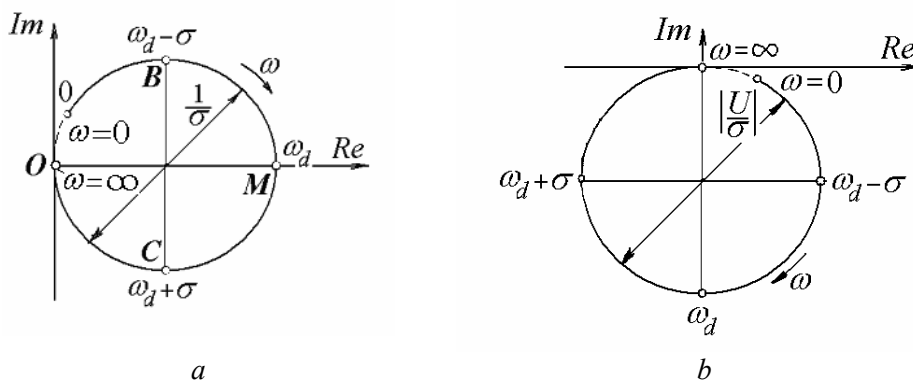


Fig. 2.36

Pentru a trasa diagrama primului termen al sumei (2.91)

$$\frac{U}{\sigma + i(\omega - \omega_d)}, \quad (2.93)$$

se consideră întâi diagrama corespunzătoare expresiei

$$\frac{1}{\sigma + i(\omega - \omega_d)} \tag{2.94}$$

În planul complex, expresia (2.94) reprezintă un cerc (fig. 2.36, a) cu centrul în punctul $(1/2\sigma, 0)$ și diametrul $1/\sigma$. În punctul M de amplitudine maximă, adică în punctul de intersecție al cercului cu axa reală, pulsația este ω_d , pulsația proprie amortizată. Constanta de atenuare σ este egală cu intervalul de frecvențe măsurat de la punctul M la punctele B și C , ai căror vectori fac unghiuri de $\pm 45^\circ$ cu vectorul răspuns din punctul M . La frecvențe negative, cercul este trasat cu linie întreruptă.

În continuare se consideră efectul numărului imaginar U de la numărătorul expresiei (2.93). Înmulțirea cu acest număr imaginar produce o rotație de 90° a diagramei în sens orar și o dilatare sau contracție cu un factor $1/2m\omega_d$ (fig. 2.36, b). Cercul rezultat se numește *cercul cu pulsații predominant pozitive*. Centrul acestui cerc este în punctul $(0, -|U/2\sigma|)$ iar diametrul este $\left| \frac{U}{\sigma} \right| = \frac{1}{2k} \frac{1}{\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$.

Porțiunea trasată cu linie întreruptă corespunde pulsațiilor negative.

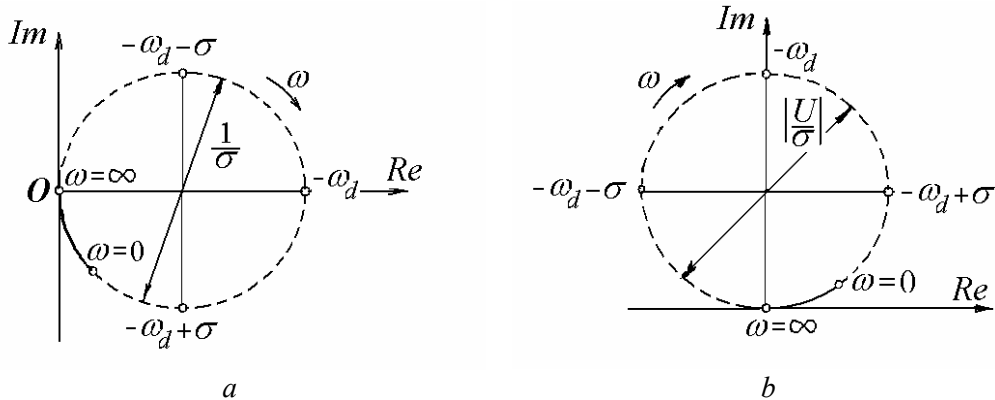


Fig. 2.37

Se consideră apoi al doilea termen al sumei (2.91)

$$\frac{U^*}{\sigma + i(\omega + \omega_d)} \tag{2.95}$$

Diagrama polară a expresiei

$$\frac{1}{\sigma + i(\omega + \omega_d)} \tag{2.96}$$

este prezentată în fig. 2.37, a.

Expresia (2.95) reprezintă de asemenea un cerc (fig. 2.37, *b*), numit *cercul cu pulsații predominant negative*. Acest cerc are același diametru cu cercul din fig. 2.36, *b* dar este rotit 90^0 în sens trigonometric față de axa reală. Arcul de cerc corespunzător pulsațiilor pozitive reprezintă numai o mică parte din acest cerc. Restul cercului, corespunzător pulsațiilor negative, este trasat cu linie întreruptă.

Combinând diagramele din fig. 2.36, *b* și fig. 2.37, *b*, se obține diagrama Nyquist din fig. 2.38, *a* (linie groasă), care nu mai este un cerc. Câteva astfel de diagrame sunt prezentate în fig. 2.38, *b* pentru diferite valori ale lui ζ .

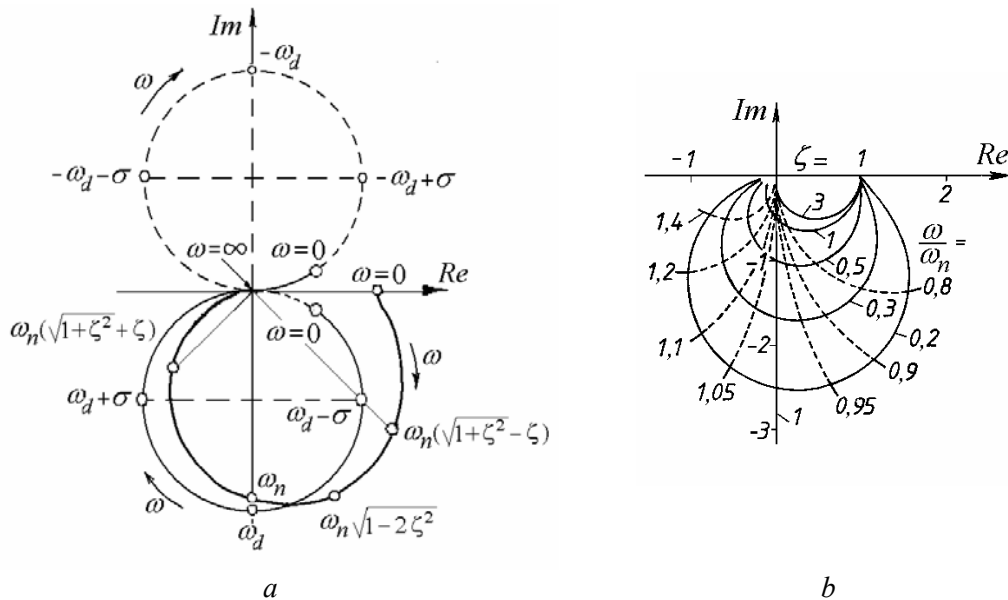


Fig. 2.38

Valoarea FRF (2.89) la pulsația proprie amortizată este

$$H(i\omega_d) = \frac{R/2i}{\sigma} - \frac{R^*/2i}{\sigma + i2\omega_d},$$

$$H(i\omega_d) = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{m\omega_d\sigma} - \frac{1}{m\omega_d(\sigma + i2\omega_d)} \right]. \quad (2.97)$$

Aceasta poate fi aproximată prin

$$H(i\omega_d) \cong \frac{R}{i2\sigma} = \frac{1}{i2\sigma m\omega_d} \quad (2.98)$$

deoarece al doilea termen în membrul drept al expresiei (2.97) tinde spre zero pentru valori mari ale lui ω_d .

De fapt, o serie de modele cu un grad de libertate pot fi reprezentate simplificat prin funcția

$$H(i\omega) \cong \frac{R}{2i(\omega - s_1)} = \frac{R}{2i[\omega - (\sigma - i\omega_d)]}. \quad (2.99)$$

2.4.9 Transmisibilitatea în sisteme amortizate

Dacă sistemul masă-arc-amortizor este excitat cinematic la bază cu o deplasare $x_1 = X_1 e^{i\omega t}$, mișcarea transmisă masei este $x_2 = \bar{X}_2 e^{i\omega t}$, unde $\bar{X}_2 = |\bar{X}_2| e^{-i\varphi}$ este o amplitudine complexă. Ecuația diferențială a mișcării este

$$m \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

și poate fi rearanjată sub forma

$$m \ddot{x}_2 + c \dot{x}_2 + k x_2 = c \dot{x}_1 + k x_1. \quad (2.100)$$

Raportul amplitudinilor este

$$\frac{\bar{X}_2}{X_1} = \frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c}. \quad (2.101)$$

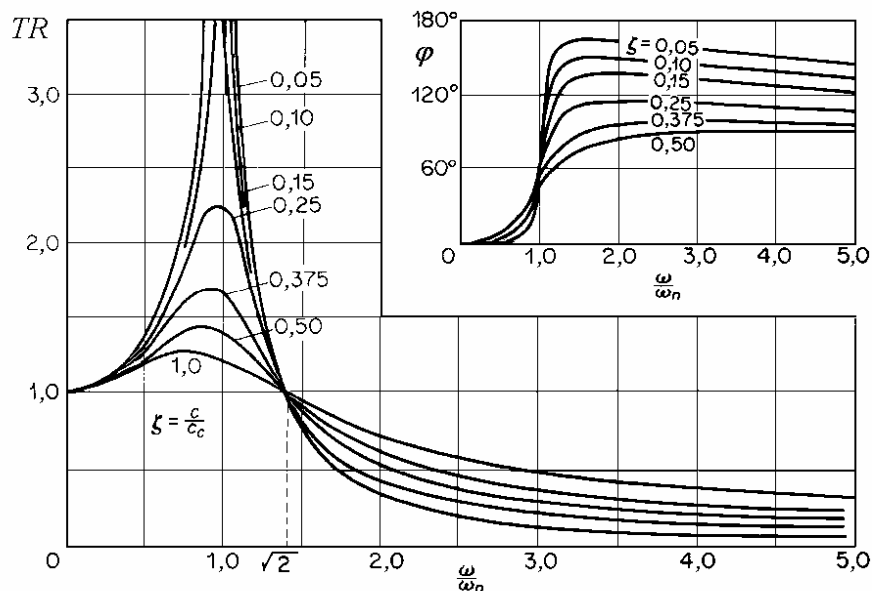


Fig. 2.39

Transmisibilitatea mișcării este

$$TR = \frac{|\bar{X}_2|}{X_1} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta \omega / \omega_n)^2}}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + (2\zeta \omega / \omega_n)^2}}, \quad (2.102)$$

Defazajul între cele două mișcări este dat de

$$\varphi = \arctg \frac{2\zeta (\omega / \omega_n)^3}{1 - (\omega / \omega_n)^2 + (2\zeta \omega / \omega_n)^2}. \quad (2.103)$$

Expresiile (2.102) și (2.103) sunt reprezentate grafic în fig. 2.39 pentru câteva valori ale raportului de amortizare ζ .

Pentru $\omega / \omega_n > \sqrt{2}$, TR este subunitară, ca în fig. 2.17, însă dacă amortizarea crește, crește și transmisibilitatea, deci scade gradul de izolare. Diminuarea amortizării nu este o soluție eficientă deoarece, pentru a funcționa la pulsații $\omega / \omega_n > \sqrt{2}$, sistemul trebuie să treacă prin rezonanță, unde amplitudinea este limitată de amortizare. În unele cazuri, există o amortizare redusă inerentă iar amplitudinile mari în vecinătatea rezonanței sunt eliminate prin limitatoare sau accelerarea prin rezonanță.

O problemă similară de izolare a vibrațiilor poate fi formulată pentru un sistem rezemat la bază și excitat prin masă (fig. 2.26). Dacă forța excitatoare ce trebuie izolată este $F_0 e^{i\omega t}$ (2.73), iar amplitudinea complexă a deplasării este \bar{X} (2.74), atunci forța transmisă prin arc și amortizor, legate în paralel, este armonică și de amplitudine

$$F_T = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} \quad (2.104)$$

astfel că *transmisibilitatea forței*

$$TR = F_T / F_0 \quad (2.105)$$

este dată de expresia (2.102).

De observat că forța transmisă la bază prin arc și amortizor este defazată față de forța elastică și forța de amortizare.

2.4.10 Teoria captorilor seismici

Există două tipuri conceptual diferite de instrumente pentru măsurarea vibrațiilor: a) *aparate cu punct fix* sau *cvasi-stactice*, care măsoară mișcarea vibratorie față de un punct de referință fix în spațiu, și b) *captori seismici*, în care mișcarea vibratorie este măsurată față de masa unui sistem masă-arc-amortizor atașat structurii în vibrație.

Captorul seismic (fig. 2.40) constă din suportul S , atașat rigid de sistemul în vibrație, sistemul masă-arc-amortizor $m-k-c$, și traductorul T , care măsoară mișcarea relativă între masa seismică și suport.

Se presupune că sistemul în vibrație, deci și baza captorului, efectuează o mișcare armonică

$$x_1(t) = X_1 \cos \omega t. \quad (2.106)$$

Neglijând termenii tranzitorii, deplasarea relativă între masa m și suportul S poate fi scrisă sub forma

$$x_r(t) = X_r \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.107)$$

Deplasarea absolută a masei m , față de un punct de referință fix, este

$$x_2 = x_1 + x_r$$

iar accelerația absolută este

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_r.$$

Ecuția de mișcare a masei m este

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_r) + c\dot{x}_r + kx_r = 0$$

sau

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_1 = mX_1\omega^2 \cos \omega t. \quad (2.108)$$

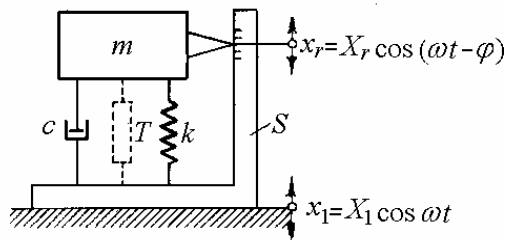


Fig. 2.40

Ecuția (2.108) are o soluție staționară pentru care

$$\frac{X_r}{X_1} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}, \quad (2.109)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2}. \quad (2.110)$$

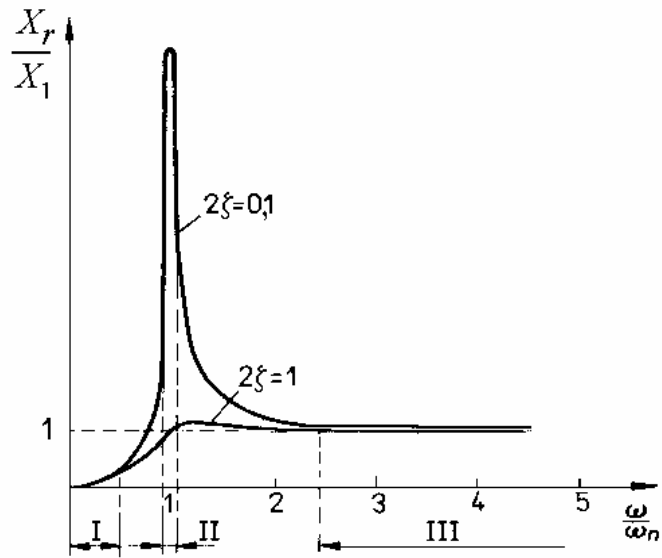


Fig. 2.41

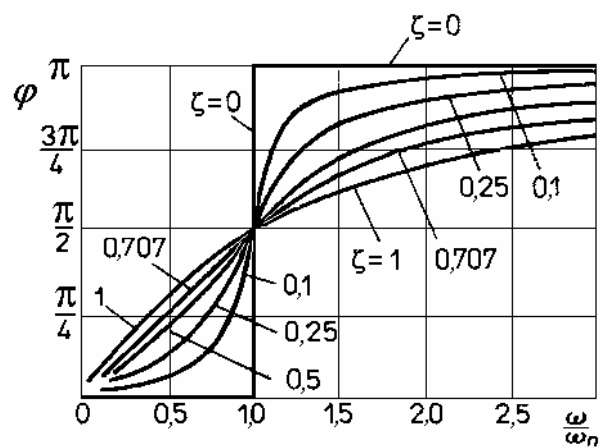


Fig. 2.42

În fig. 2.41 se arată variația raportului amplitudinilor (2.109) în funcție de pulsația adimensională ω/ω_n , pentru două valori ale raportului de amortizare. Figura 2.42 prezintă variația defazajului φ în funcție de ω/ω_n .

În funcție de domeniul de pulsații utilizat, captorul măsoară deplasarea, viteza sau accelerația.

Vibrometrul. În intervalul III, la pulsații $\omega \gg \omega_n$, se observă că $X_r \cong X_1$, deci deplasarea relativă X_r între masă și suport, măsurată de traductor, este practic egală cu deplasarea X_1 a structurii în vibrație. Figura 2.42 arată că, în acest domeniu de pulsații, defazajul este $\varphi = \pi$ pentru amortizare mică ($\zeta \rightarrow 0$), astfel că masa m și suportul vibrează defazate cu 180° . Față de un sistem de referință inerțial (punct de referință fix) masa m rămâne aproape nemișcată (devine un “punct fix” în spațiu) iar mișcarea suportului este măsurată în raport cu masa.

Dacă T este un traductor de deplasări, instrumentul este un *captor seismic de deplasări absolute (vibrometru)*. Dacă T este un traductor de viteze, atunci instrumentul devine un *captor de viteze*.

Captorii seismici de deplasări au frecvențe proprii joase (1-5 Hz) care se obțin cu valori mici ale rigidității k , deci cu o suspensie moale a masei seismice, respectiv cu mase m mari.

Accelerometrul. În intervalul I, la pulsații $\omega \ll \omega_n$, expresia (2.109) devine

$$X_r/X_1 \cong (\omega/\omega_n)^2,$$

sau

$$X_r \cong \frac{1}{\omega_n^2} (X_1 \omega^2), \quad (2.111)$$

unde $X_1 \omega^2$ este accelerația structurii în vibrație.

În acest caz, captorul măsoară o mărime direct proporțională cu accelerația absolută a structurii și se numește *accelerometru*. El are o frecvență proprie relativ mare, realizată cu o masă seismică mică și cu un arc rigid.

În intervalul II, la $\omega \cong \omega_n$, masa vibrează cu amplitudini mari, proprietate utilizată în proiectarea frecvențmetrelor lamelare și accelerometrelor folosite la măsurarea defectelor rulmenților.

Distorsiuni de amplitudine. Pentru a reproduce un semnal complex fără distorsiuni, toate componentele armonice trebuie amplificate în mod egal, indiferent de frecvență. Aceasta se poate realiza dacă raportul amplitudinilor X_r/X_1

este aproape constant. Ca urmare, pentru fiecare captor se indică domeniul frecvențelor de lucru în care distorsiunile sunt sub anumite limite.

Figura 2.43 prezintă o porțiune mărită a fig. 2.41, cu patru curbe trasate pentru diferite valori ale raportului de amortizare. Captorul cu $\zeta = 0,7$ are o curbă de răspuns orizontală până la $\omega/\omega_n = 4$. Distorsiunile de amplitudine fixează o limită inferioară a frecvențelor vibrațiilor măsurate cu un captor de deplasări.

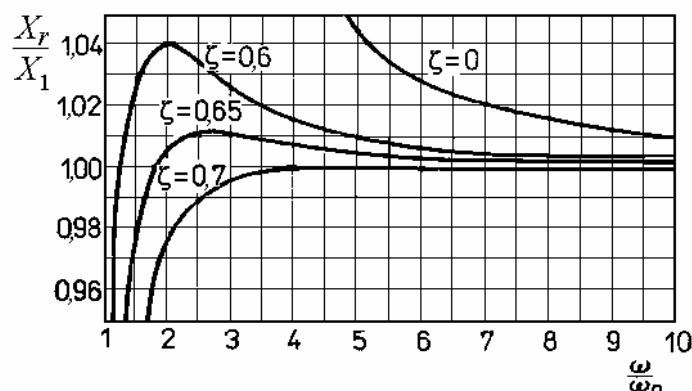


Fig. 2.43

Distorsiuni de fază. Pentru a reproduce un semnal complex fără modificarea formei în timp a acestuia, defazajele relative ale diferitelor componente armonice trebuie să fie egale. Aceasta se poate realiza dacă defazajul φ crește liniar cu frecvența.

La un vibrometru, raportul ω/ω_n este relativ mare, și unghiul φ este aproximativ 180° pentru toate armonicile, deci nu apar distorsiuni de fază. La un accelerometru, când raportul de amortizare este aproximativ egal cu 0,7, există o relație aproape liniară între unghiul de fază și pulsație, $\varphi \cong (\pi/2)(\omega/\omega_n)$. Această valoare a amortizării este folosită pentru minimizarea răspunsului tranzitoriu al captorului.

2.4.11 Precesia rotorului Laval cu amortizare externă

Se consideră mișcarea rotorului din fig. 2.18 sub acțiunea unei forțe de frecare generate de mișcarea relativă față de mediul ambiant staționar. În timpul precesiei sincrone, punctele C și G se rotesc în jurul axei lagărelor O cu o viteză unghiulară ω , aceeași ca viteza de rotație a arborelui în jurul lui C . Forța de amortizare f_d se poate considera proporțională cu viteza tangențială $r_C\omega$, deci $f_d = -c r_C\omega$, unde c este coeficientul de amortizare vâscoasă exterioară.

Diagrama forțelor care acționează asupra discului este prezentată în fig. 2.44. Forța de readucere elastică kr_C , datorită încovoierii arborelui, acționează pe direcția CO . Forța centrifugă $m\omega^2 r_G$, datorită excentricității $CG = e$, acționează pe direcția OG . Forța de amortizare vâscoasă este perpendiculară pe OC . Punctele O , C și G nu mai sunt coliniare, iar linia CG devansează linia OC cu un unghi φ .

Echilibrul dinamic al celor trei forțe implică

$$m\omega^2(r_C + e \cos\varphi) = kr_C, \quad m\omega^2 e \sin\varphi = cr_C\omega. \quad (2.112)$$

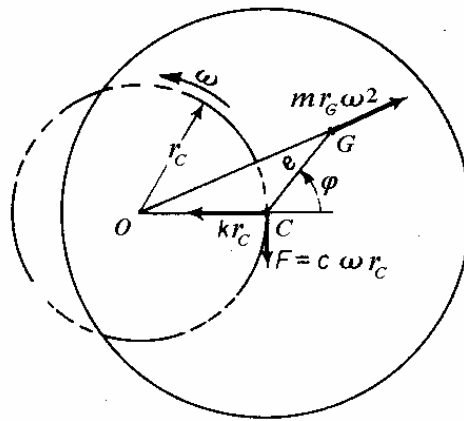


Fig. 2.44

Orbita circulară a punctului C are o rază

$$r_C = \frac{m\omega^2 e \cos\varphi}{k - m\omega^2} = e \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}. \quad (2.113)$$

La turația critică, atunci când $\omega = \omega_n$, raza orbitei este $r_C = e/2\zeta$.

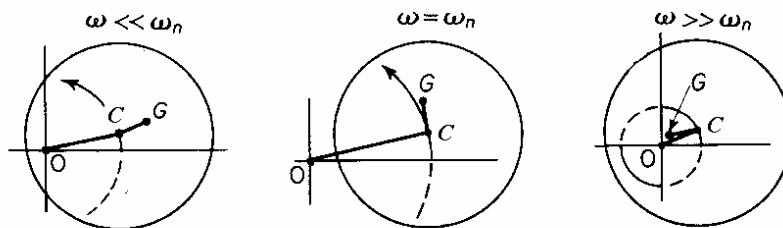


Fig. 2.45

Unghiul între segmentele CG și OC este dat de

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c \omega}{k - m \omega^2} = \frac{2 \zeta \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2}. \quad (2.114)$$

Unghiul φ crește cu viteza unghiulară ω . Când $\omega < \omega_n$ (fig. 2.45, *a*), discul se rotește cu punctul G în afara lui C . Cu creșterea turației, lungimea segmentului OC crește, și CG se rotește față de OC . La $\omega = \omega_n$, segmentul CG este rotit față de OC cu 90° . Când $\omega > \omega_n$, discul se rotește cu punctul G în interiorul cercului descris de C , iar lungimea segmentului OC descrește. La turații foarte mari, punctul G coincide cu punctul O , raza r_C tinde spre e , iar arborele are o precesie în jurul centrului său de greutate.

2.4.12 Amortizarea ereditară

Amortizarea vâscoasă intervine în cel mai simplu model, care constă dintr-un amortizor legat în paralel cu un arc (fig. 2.26). numit modelul Kelvin-Voigt, cu amortizare *cuplată direct*.

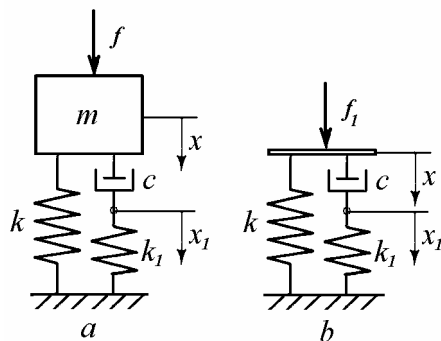


Fig. 2.46

Alte modele simple includ mecanisme de amortizare vâscoasă *cuplate elastic*. În *modelul Maxwell* cu trei parametri, amortizorul este legat în serie cu un al doilea arc (fig. 2.46, *a*). Sistemul are două grade de libertate.

Ecuțiile de mișcare se scriu

$$m \ddot{x} + k x + c (\dot{x} - \dot{x}_1) = f, \quad c (\dot{x} - \dot{x}_1) = k_1 x_1. \quad (2.115)$$

Pentru o excitație $f = F_0 e^{i\omega t}$, se presupun soluții de forma

$$x = \bar{X} e^{i\omega t}, \quad x_1 = \bar{X}_1 e^{i\omega t}, \quad (2.116)$$

unde \bar{X} și \bar{X}_1 sunt amplitudini complexe.

Ecuțiile (2.115) devin

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2 + i\omega c)\bar{X} - i\omega c\bar{X}_1 &= F_0, \\ -i\omega c\bar{X} + (k_1 + i\omega c)\bar{X}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.117)$$

și pot fi rescrise sub forma

$$\begin{aligned} (1 - \eta^2 + i2\zeta\eta)\bar{X} - i2\zeta\eta\bar{X}_1 &= F_0/k, \\ -i2\zeta\eta\bar{X} + (N + i2\zeta\eta)\bar{X}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.118)$$

unde s-a notat

$$\omega_n = \sqrt{k/m}, \quad \eta = \omega/\omega_n, \quad \zeta = c/2m\omega_n, \quad N = k_1/k. \quad (2.119)$$

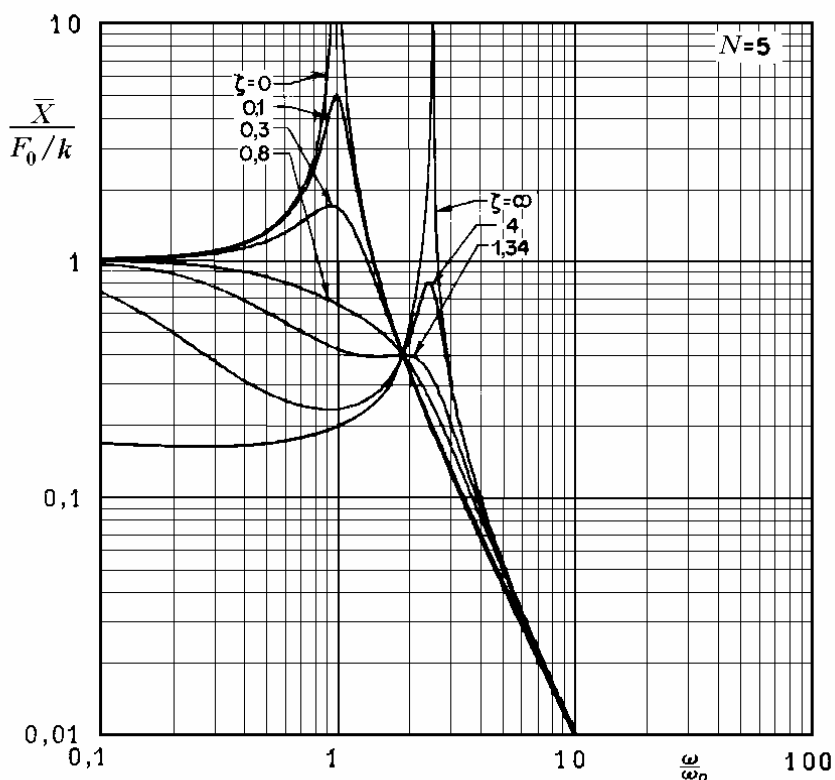


Fig. 2.47

Amplitudinea deplasării complexe a masei m este

$$\frac{\bar{X}}{F_0/k} = \frac{1+i2\zeta\eta/N}{1-\eta^2+i(2\zeta\eta/N)(N+1-\eta^2)}. \quad (2.120)$$

Factorul de amplificare a deplasărilor

$$\frac{|\bar{X}|}{F_0/k} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\eta/N)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta/N)^2(N+1-\eta^2)^2}}. \quad (2.121)$$

este reprezentat grafic în fig. 2.47 pentru un raport al rigidităților $N=5$ și diferite valori ale raportului de amortizare. Diagrama unghiului de fază corespunzător este prezentată în fig. 2.48.

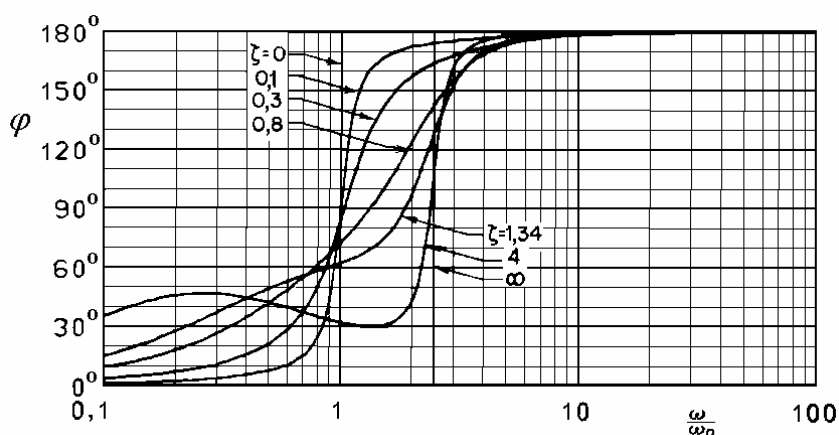


Fig. 2.48

Expresia (2.121) poate fi ridicată la pătrat și scrisă sub forma

$$\left(\frac{|\bar{X}|}{F_0/k}\right)^2 = \psi^2 = \frac{C_1 + \zeta^2 C_2}{C_3 + \zeta^2 C_4}. \quad (2.122)$$

sau

$$C_3 \psi^2 - C_1 + (C_4 \psi^2 - C_2) \zeta^2 = 0. \quad (2.123)$$

Toate curbele fascicolului reprezentat de ecuația (2.123) trec prin punctul de intersecție al celor două curbe de ecuații

$$C_3 \psi^2 - C_1 = 0, \quad C_4 \psi^2 - C_2 = 0.$$

Acestea pot fi exprimate sub forma

$$\psi = \sqrt{C_1/C_3}, \quad \psi = \sqrt{C_2/C_4},$$

sau

$$\frac{|\bar{X}|}{F_0/k} = \frac{1}{1-\eta^2}, \quad (2.124)$$

și

$$\frac{|\bar{X}|}{F_0/k} = \frac{1}{N+1-\eta^2}. \quad (2.125)$$

Expresia (2.124) reprezintă curba (2.123) de parametru $\zeta = 0$. Expresia (2.125) reprezintă curba (2.123) de parametru $\zeta = \infty$. Cele două curbe se intersectează în punctul de abscisă $\eta = \sqrt{(N+2)/2}$ și ordonată $|\bar{X}|/(F_0/k) = 2/N$. Toate curbele de răspuns în frecvență trec prin acest punct.

Figura 2.47 arată că mici variații ale amortizării pot produce variații însemnate ale pulsației de rezonanță. Această comportare este total diferită de cea a sistemelor cu amortizare vâscoasă cuplată direct (fig. 2.28), la care variația pulsației de rezonanță cu amortizarea este neglijabilă.

Pulsația de rezonanță crește de la $\eta = 1$ pentru $\zeta = 0$, la $\eta = \sqrt{1+N}$ pentru $\zeta = \infty$. Când amortizarea crește, vârful răspunsului întâi descrește, apoi crește, ceea ce indică existența unei amortizări optime

$$\zeta_{opt} = N/\sqrt{2(N+2)},$$

la care vârful de rezonanță are amplitudine minimă, egală cu ordonata punctului de intersecție al tuturor curbelor trasate pentru diferite valori ale raportului de amortizare.

Pentru $N > 2$ și valori ale raportului de amortizare $0,7 < \zeta < \zeta_{opt}$, în curbele de răspuns în frecvență nu apare un vârf de rezonanță.

Această comportare poate fi explicată analizând răspunsul dinamic al modelului cu trei parametri din fig. 2.46, *b*. Comportarea acestuia este descrisă de două ecuații

$$f_1 = kx + c(\dot{x} - \dot{x}_1), \quad (2.126)$$

$$c(\dot{x} - \dot{x}_1) = k_1 x_1. \quad (2.127)$$

Deoarece nu interesează coordonata “ascunsă” x_1 , care definește gradul de libertate interior, se rezolvă ecuația (2.127) pentru x_1 și se înlocuiește rezultatul în ecuația (2.126). Rezultă

$$f_1 = kx + \int_0^t G(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau, \quad (2.128)$$

unde

$$G(t) = k_1 e^{-\frac{k_1}{c}t} \quad (2.129)$$

cu presupunerea subînțeleasă că modelul este nesolicitat la $t = 0$.

În expresia (2.128) termenul care descrie amortizarea depinde de toată istoria variației în timp a vitezei; de aici denumirea de “amortizare ereditară”.

Când forța f_1 este dată ca o funcție de timp, soluția ecuațiilor (2.126) și (2.127) este

$$x(t) = \frac{f_1(t)}{k+k_1} + \frac{1}{c} \left(\frac{k_1}{k+k_1} \right)^2 \int_0^t e^{-\frac{\tau}{\tau_1}} f_1(t-\tau) d\tau, \quad (2.130)$$

unde “constanta de timp” a modelului este

$$\tau_1 = c \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} \right).$$

Primul termen în membrul drept al expresiei (2.130) descrie răspunsul instantaneu, observat practic la multe sisteme amortizate.

În continuare se consideră răspunsul forțat la excitație armonică. Înlocuind soluțiile complexe (2.116) în ecuațiile (2.126) și (2.127), apoi eliminând coordonata internă, se obține

$$f_1 = \bar{k} x, \quad (2.131)$$

unde rigiditatea complexă \bar{k} este

$$\bar{k} = k + i \frac{\omega c k_1}{k_1 + i \omega c}. \quad (2.132)$$

Dacă în expresia (2.132) se separă partea reală și cea imaginară, se obține forma corespunzătoare modelului cu amortizare vâscoasă cuplată direct

$$\bar{k} = k_e + i \omega c_e, \quad (2.133)$$

unde *rigiditatea echivalentă* și *coeficientul de amortizare vâscoasă echivalentă* sunt

$$k_e = k + k_1 \frac{\omega^2 c^2}{k_1^2 + \omega^2 c^2}, \quad c_e = c \frac{k_1^2}{k_1^2 + \omega^2 c^2}. \quad (2.134)$$

Modelul cu amortizare ereditară este astfel redus la un model Kelvin-Voigt cu parametri dependenți de frecvență. Rigiditatea echivalentă k_e crește cu pulsația de la valoarea k și tinde asimptotic spre $k + k_1$, în timp ce coeficientul de amortizare vâscoasă echivalentă c_e descrește de la valoarea c la zero.

Energia disipată într-un ciclu de vibrație este

$$W_d = \pi X^2 \omega c_e = \pi X^2 \frac{\omega c k_1^2}{k_1^2 + \omega^2 c^2} \quad (2.135)$$

fiind nulă la $\omega = 0$ și $\omega = \infty$, având o valoare maximă la $\omega_0 = k_1/c$ pulsație la care $c_e = c/2$.

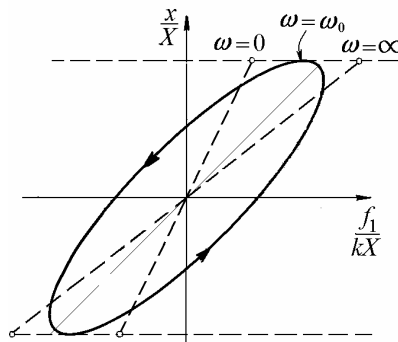


Fig. 2.49

Această comportare se regăsește și în curba de histererezis (fig. 2.49). La pulsație nulă aceasta este o dreaptă care corespunde unui arc de rigiditate k . La $\omega = \omega_0$ elipsa are suprafața maximă. Când pulsația tinde spre infinit, răspunsul este o dreaptă mai puțin înclinată, care corespunde unui arc de rigiditate $k + k_1$.

2.5 Sisteme cu rigiditate cubică

Sistemele vibratoare reale pot avea caracteristici neliniare. Forța elastică poate fi o funcție neliniară de deplasare, iar forța de amortizare poate fi o funcție neliniară de viteză sau deplasare. Dacă un sistem neliniar este acționat de o forță armonică, răspunsul staționar nu mai este armonic, ca la sisteme liniare, ci *periodic*, deci poate fi exprimat ca o sumă de componente armonice.

Sistemele cu neliniarități locale mici pot fi studiate folosind *metoda liniarizării echivalente*, în care se presupune că răspunsul este dominat de

componenta armonică fundamentală. Se consideră că răspunsul staționar constă dintr-o singură armonică la frecvența excitației, neglijând componentele subarmonice sau supraarmonice. Răspunsul forțat este studiat numai în vecinătatea așa-numitei *rezonanțe principale*. Studiul sistemelor neliniare depășește cadrul acestei lucrări. În continuare se descrie numai răspunsul armonic forțat al unui sistem cu rigiditate cubică.

2.5.1 Rigiditatea cubică

La sisteme fără preîncărcări și fără jocuri, forța elastică poate fi reprezentată printr-o funcție cubică de deplasări

$$f_e = k(x + \mu x^3), \quad (2.136)$$

numită *caracteristica elastică a arcului*. Se spune (impropriu) că sistemul are o *rigiditate cubică*.

În expresia (2.136), k este panta în origine iar μ este un coeficient de neliniaritate. Coeficientul μ este pozitiv la sisteme cu *caracteristică tare* (cu pantă crescătoare) și negativ la cele cu *caracteristică moale* (cu pantă descrescătoare).

Pentru o deplasare armonică

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad (2.137)$$

forța elastică (2.136) devine $f_e = k a (\cos \omega t + \mu a^2 \cos^3 \omega t)$.

Înlocuind $\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t$, și neglijând termenul armonic superior în $\cos 3\omega t$, se obține

$$f_e \cong k a \left(\cos \omega t + \mu a^2 \frac{3}{4} \cos \omega t + \dots \right) = k_{ech} x,$$

unde rigiditatea echivalentă este

$$k_{ech} = k \left(1 + \frac{3}{4} \mu a^2 \right). \quad (2.138)$$

Răspunsul dinamic al sistemului neliniar se poate obține introducând această rigiditate dependentă de amplitudinea deplasării în locul rigidității constante în ecuațiile obținute pentru sistemul liniar.

2.5.2 Răspunsul armonic

În fig. 2.50 se prezintă un sistem cu un grad de libertate, cu un arc neliniar și un element disipativ cu amortizare structurală. Arcul are o caracteristică elastică tare, descrisă de o rigiditate cubică cu coeficient de neliniaritate pozitiv.

Dacă asupra masei acționează o forță armonică de amplitudine constantă F_0 și pulsație ω , ecuația de mișcare de tip Duffing a masei se poate scrie sub forma

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + k(x + \mu x^3) = F_0 e^{i\omega t}, \quad (2.139)$$

unde $h = gk$, iar g este un factor de amortizare structurală echivalentă.

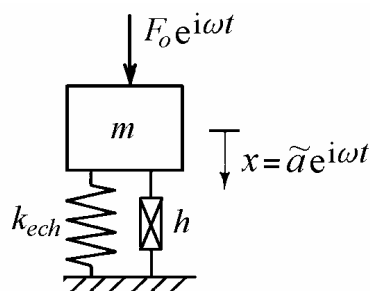


Fig. 2.50

Răspunsul este aproximat cu prima armonică

$$x = \tilde{a} e^{i\omega t} = (a_R + i a_I) e^{i\omega t} = a e^{i(\omega t + \theta)}. \quad (2.140)$$

Utilizând metoda liniarizării armonice, se neglijează armonicile de ordin superior, deci se consideră că

$$x^3 \cong \frac{3}{4} a^2 x. \quad (2.141)$$

Înlocuind (2.140) și (2.141) în (2.139) se obțin componenta reală și cea imaginară ale deplasării

$$a_R = \left(1 + \frac{3}{4} \mu a^2 - \eta^2\right) \frac{k}{F_0} a^2 = \mp \sqrt{a^2 - \left(\frac{gk a^2}{F_0}\right)^2}, \quad (2.142)$$

$$a_I = -g \frac{k}{F_0} a^2, \quad (2.143)$$

unde s-a notat

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.144)$$

Amplitudinea deplasării

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_I^2} \quad (2.145)$$

este dată implicit de expresia

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4} \mu a^2 \pm \sqrt{\frac{F_0^2}{k^2 a^2} - g^2}. \quad (2.146)$$

Unghiul de fază se calculează din relația

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{g}{\eta^2 - 1 - \frac{3}{4} \mu a^2} = \frac{g}{\pm \sqrt{\frac{F_0^2}{k^2 a^2} - g^2}}. \quad (2.147)$$

Eliminând a și η^2 între expresiile (2.142) și (2.143) se obține locul geometric al vârfului vectorului \tilde{a} în planul complex, care este un cerc de ecuație

$$a_R^2 + \left(a_I + \frac{1}{2g} \frac{F_0}{k} \right)^2 = \left(\frac{1}{2g} \frac{F_0}{k} \right)^2. \quad (2.148)$$

Aceasta este identică cu ecuația (2.82) obținută pentru sisteme liniare.

Eliminând amplitudinea a între relațiile (2.143) și (2.145) se obține dependența de frecvență a componentei imaginare a_I a deplasării

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4} \mu \frac{F_0}{gk} (-a_I) \pm g \sqrt{\frac{F_0}{gk} \frac{1}{(-a_I)} - 1}. \quad (2.149)$$

Similar, dependența de frecvență a componentei reale a_R a deplasării se obține sub forma

$$\eta^2 = 1 + 3\mu \left(\frac{F_0}{2gk} \right)^2 - \frac{3\mu \left(\frac{F_0}{2gk} \right)^2 a_R^2 + \frac{F_0}{k} a_R}{2 \left(\frac{F_0}{2gk} \right)^2 \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2gk}{F_0} \right)^2 a_R^2} \right]}. \quad (2.150)$$

2.5.3 Curbele răspunsului în frecvență

Pe baza relației (2.146), în fig. 2.51 s-au trasat curbele amplitudine-pulsatie pentru o valoare $g = \text{const.}$ și câteva valori F_0 ale amplitudinii forței armonice (care cresc în sensul săgeții).

Curbele de răspuns sunt dispuse simetric față de “curba schelet” de ecuație

$$\omega^2 = \omega_n^2 \left(1 + \frac{3}{4} \mu a^2 \right) \quad (2.151)$$

care trece prin punctele de amplitudine maximă. La sisteme liniare, aceasta este o linie verticală de abscisă $\omega = \omega_n$. La sisteme cu caracteristică tare ($\mu > 0$), curba schelet se “apleacă” spre pulsațiile înalte. La sisteme cu caracteristică moale ($\mu < 0$), curba schelet se “apleacă” spre pulsațiile joase.

Locul geometric al punctelor cu tangentă verticală de pe curbele amplitudine-pulsație are ecuația

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4} \mu a^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16} \mu^2 a^4 - g^2} \quad (2.152)$$

și definește “limita de stabilitate” *XLKY* (Fig. 2.51).

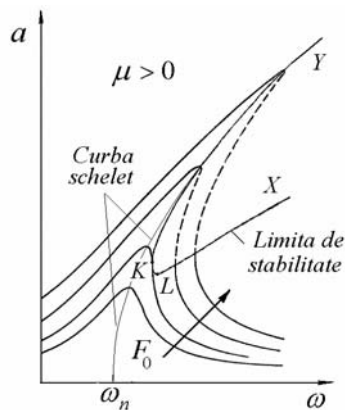


Fig. 2.51

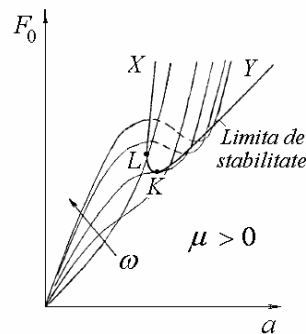


Fig. 2.52

Punctele situate în interiorul regiunii delimitate de această curbă definesc regimuri instabile de vibrație. Pe curbele de răspuns aceste puncte corespund porțiunilor trasate cu linie întreruptă.

Aceeași informație este redată în fig. 2.52 unde s-au trasat curbele forță-deplasare la diferite pulsații (care cresc în sensul săgeții) și $g = \text{const}$. Acestea sunt *curbe de pulsație constantă*, numite și *izocrone*. Limita de stabilitate este definită de locul geometric al punctelor cu tangentă orizontală. Punctul *K* definește amplitudinea maximă a forței pentru care vibrațiile sunt stabile indiferent de amplitudinea deplasării. Punctul *L* definește amplitudinea maximă a deplasării pentru care vibrațiile sunt stabile indiferent de nivelul forței.

Curbele fază-pulsație din fig. 2.53 se bazează pe expresia (2.147). Limita de stabilitate *XLKY* este definită de ecuația

$$\eta^2 = 1 + \frac{g}{2} \left(\operatorname{tg} \theta + \frac{3}{\operatorname{tg} \theta} \right), \quad (2.153)$$

care este locul geometric al punctelor cu tangentă verticală în fig. 2.53.

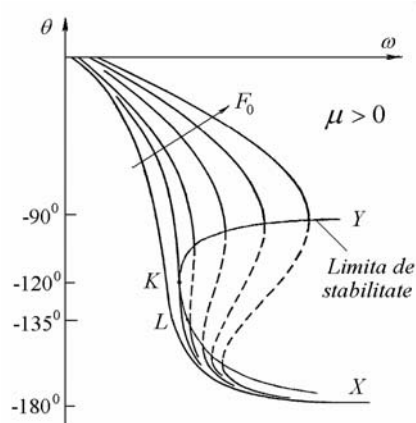


Fig. 2.53

Curbele polare ale răspunsului în frecvență sunt prezentate în fig. 2.54, în coordonate $a_I - a_R$. O astfel de reprezentare combină în aceeași diagramă informația asupra amplitudinii, fazei și pulsației vibrației, iar regiunea din vecinătatea rezonanței ocupă o mare parte a curbelor.

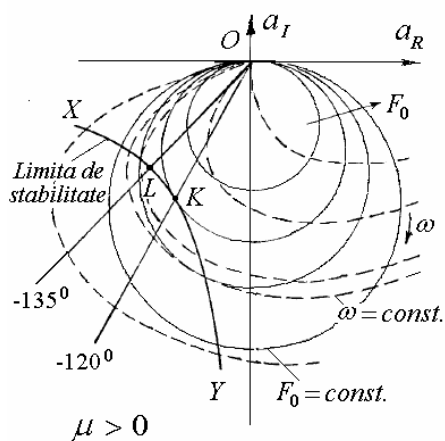


Fig. 2.54

La sisteme neliniare se recomandă trasarea diagramelor *deplasării* și nu cele ale *receptanței* (deplasare/forță) sau altor FRF. Fiecare punct reprezentat în

planul complex este definit de doi parametri – pulsația excitatoare, ω , și amplitudinea forței F_0 . Ca urmare, se pot trasa două familii de curbe de răspuns, *izocronele* – care unesc punctele cu aceeași pulsație și diagramele Nyquist – care unesc punctele cu nivel constant al excitației. Deoarece atât amplitudinea deplasării cât și unghiul de fază sunt funcții de amplitudinea forței, deviația acestor curbe de la linia dreaptă poate fi utilizată ca un indicator al comportării neliniare. În general, faza este mult mai sensibilă la neliniarități decât amplitudinea.

În fig. 2.54, izocronele sunt trasate cu linii întrerupte. Ecuația lor se obține eliminând F_0 între expresiile (2.142) și (2.143). Rezultă

$$a_R = \left[\eta^2 - 1 - \frac{3}{4} \mu (a_R^2 + a_I^2) \right] \frac{a_I}{g}. \quad (2.154)$$

Pentru $\mu = 0$, deci pentru sisteme liniare, ecuația (2.154) descrie linii drepte care trec prin originea coordonatelor. Pentru $\mu \neq 0$, ecuația (2.154) descrie curbe care trec prin origine, având deviații de la forma rectilinie cu atât mai pronunțate cu cât F_0 este mai mare, ajungând să fie tangente la curbele Nyquist.

Locul geometric al punctelor de tangență ale diagramelor Nyquist cu izocronale definește limita de stabilitate *XLKY*. Aceasta este o hiperbolă de ecuație

$$a_R a_I = \frac{2g}{3\mu} \quad (2.155)$$

(definită numai pentru $a_R < 0$, $a_I < 0$), simetrică față de bisectoarea $a_R = a_I$ a axelor de coordonate.

Limita de stabilitate *XLKY* intersectează bisectoarea $a_R = a_I$ în punctul L , de pulsație $\omega_L = \omega_n \sqrt{1 + 2g}$, la o distanță $a_L = \sqrt{4g/3\mu}$ de origine. La pulsații joase și amplitudini mici ale deplasării nu apar fenomene de salt.

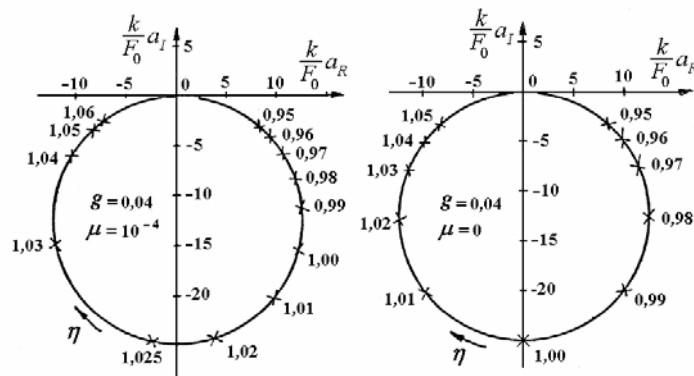


Fig. 2.55

Punctul K , unde curba limită de stabilitate este tangentă la curba Nyquist de parametru $F_0 = k\sqrt{32g^3/(9\sqrt{3}\mu)}$ și la izocrona de parametru $\omega_K = \omega_n\sqrt{1+\sqrt{3g}}$, indică forța minimă și pulsația minimă la care pot apare vibrații instabile. Acest punct corespunde unui unghi de fază $\theta_K = -120^\circ$. Punctele K și L sunt marcate și în fig. 2.51 – 2.53.

Efectul rigidității neliniare este o “deplasare a frecvențelor” în lungul diagramelor circulare Nyquist, în sens orar - pentru arcuri cu caracteristică moale, și în sens trigonometric – pentru arcuri cu caracteristică tare, așa cum se arată în fig. 2.55. Rezonanța principală ($\eta=1$) nu mai apare în punctul de amplitudine maximă a deplasării. Dacă pe diagramele Nyquist se marchează puncte la intervale egale de pulsație, atunci arcul de lungime maximă între două puncte succesive nu mai apare la rezonanța principală, deci criteriul Kennedy-Pancu nu mai poate fi utilizat pentru localizarea rezonanței.

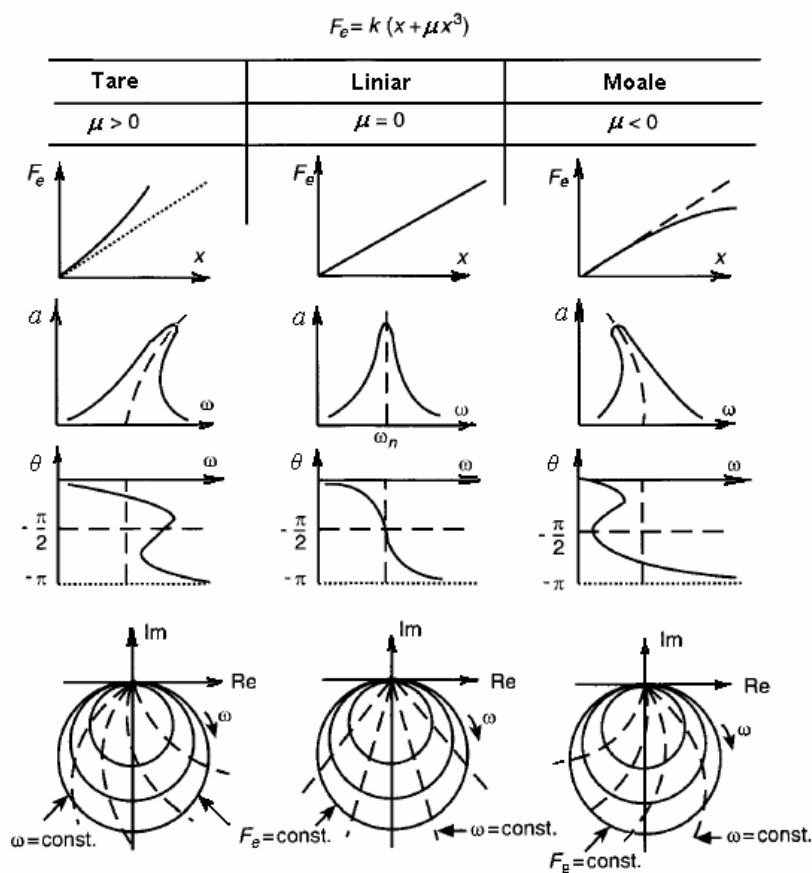


Fig. 2.56

La sistemele cu un grad de libertate, cu rigiditate cubică și amortizare structurală, diagramele Nyquist sunt cercuri ca la sistemele liniare. Neliniaritatea distorsionează izocronale care nu mai sunt linii drepte, ca la sistemele liniare, ci curbe în formă de “vârtej”.

Izocronale sunt curbate în sens trigonometric la sisteme cu caracteristică tare, și în sens orar, la sisteme cu caracteristică moale (fig. 2.56). Această proprietate poate fi utilizată la identificarea tipului neliniarității.

2.5.4 Fenomene de salt

La sisteme cu rigiditate neliniară, variația pulsației sau amplitudinii forței excitatoare produce variații bruște de amplitudine și fază, numite fenomene de “salt”, care nu se întâlnesc la sisteme liniare.

Un prim tip de fenomene de salt apare atunci când amplitudinea forței armonice F_0 este menținută constantă iar pulsația excitatoare variază lent (fig. 2.57, a). Pe măsură ce pulsația crește de la valoarea zero, amplitudinea deplasării crește, vârful vectorului deplasare parcurge porțiunea BF a diagramei Nyquist corespunzătoare până ajunge la limita de stabilitate în punctul C . Urmează un “salt” al amplitudinii și fazei din C în D , în lungul izocronalei $\omega_s = const.$, după care vârful vectorului revine pe diagrama Nyquist și parcurge arcul DO .

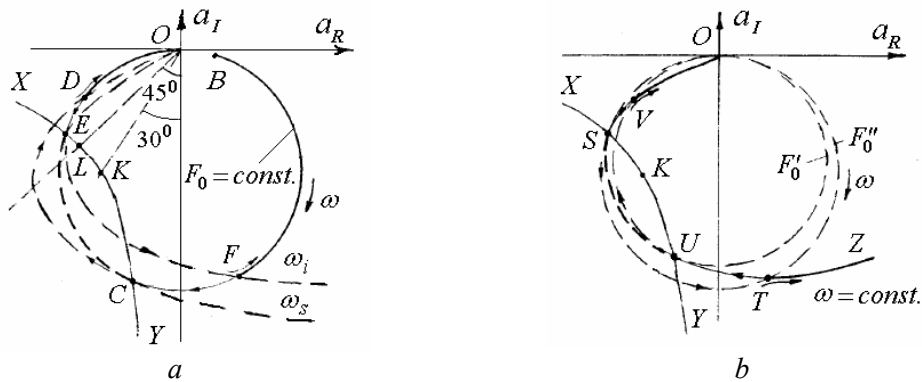


Fig. 2.57

Dacă pulsația are valori foarte mari și apoi scade, vârful vectorului deplasare parcurge arcele ODE și FB pe diagrama Nyquist, și “sare” din E în F în lungul izocronalei $\omega_i = const.$ Arcele BF și DO ale diagramei Nyquist definesc regimuri stabile de vibrații, arcele FC și ED definesc regimuri de vibrație condiționat stabile, în timp ce arcul CE definește regimuri instabile de vibrație. De aici rezultă că, în prezența neliniarităților puternice, porțiuni însemnate ale curbei de răspuns în frecvență nu pot fi obținute experimental.

Un alt fenomen de salt apare când pulsația excitatoare este menținută constantă și variază amplitudinea forței armonice aplicate sistemului (fig. 2.57, b). Când amplitudinea forței F_0 crește progresiv, amplitudinea răspunsului crește. Vârful vectorului deplasare parcurge izocrona respectivă (arcul OVS) până la limita de stabilitate în punctul S . Urmează un salt din S în T , în lungul diagramei Nyquist $F_0'' = const.$, după care vârful vectorului urmează izocrona (arcul TZ).

Când amplitudinea forței descreește, vârful vectorului deplasare parcurge porțiunea ZTU a izocronei până la limita de stabilitate în punctul U , de unde sare în punctul V , urmând cercul $F_0' = const.$ după care revine pe izocronă de la V la O .

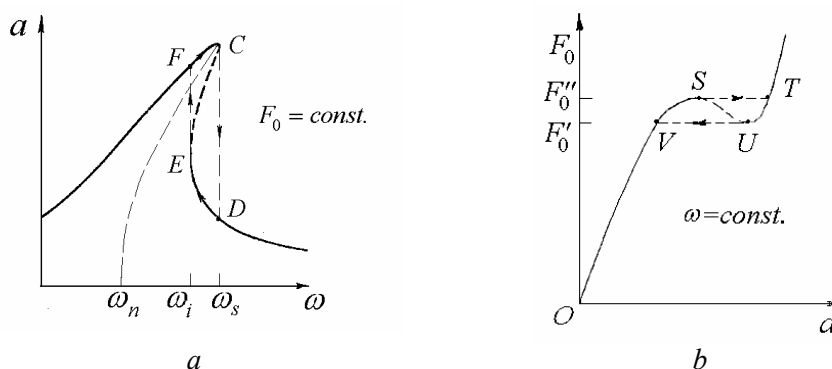


Fig. 2.58

Cele două fenomene de salt sunt reprezentate în fig. 2.58, a pe o curbă amplitudine-pulsație și în fig. 2.58, b pe o curbă forță-deplasare.

2.6 Vibrații tranzitorii

În acest paragraf se studiază răspunsul la excitații *nearmonice* al sistemelor cu un grad de libertate neamortizate. Excitațiile pot fi forțe aplicate masei sau deplasări, viteze sau accelerații aplicate bazei (suportului) sistemului, fie brusc, rămânând apoi constante, fie cu variații bruște ale amplitudinii pe o durată limitată. Ele se numesc *șocuri* dacă durata lor de variație este mai mică decât perioada proprie de oscilație a sistemului; în caz contrar se numesc *excitații tranzitorii*.

2.6.1 Răspunsul la forțe impulsive aplicate masei

Dacă se neglijează amortizarea și pentru condiții inițiale nule, deplasarea produsă prin excitarea masei unui sistem linier masă-arc cu o forță arbitrară $F(t)$ este dată de integrala lui Duhamel (2.21)

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau, \quad (2.156)$$

în care m este masa sistemului și ω_n este pulsația proprie neamortizată (2.4).

2.6.1.1 Răspunsul la o forță aplicată brusc

Se consideră un sistem masă-arc solicitat de o forță constantă $F(t) = F_0$ aplicată brusc masei, sub forma unui *impuls treaptă dreptunghiulară* (fig. 2.59, a).

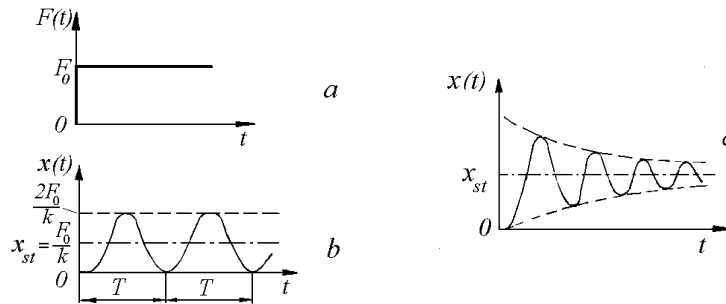


Fig. 2.59

Înlocuind forța constantă în relația (2.156), se obține expresia deplasării masei m

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t), \quad (2.157)$$

reprezentată grafic în fig. 2.59, b.

Sistemul vibrează liber în jurul poziției de echilibru static $x_{st} = F_0/k$. Răspunsul maxim al sistemului neamortizat este dublu față de cel produs de o forță F_0 aplicată static. Dacă se ține seama de amortizarea inerentă în sistem, amplitudinea deplasării masei m scade în timp și devine egală cu x_{st} după amortizarea completă a vibrațiilor (fig. 2.59, c).

2.6.1.2 Răspunsul la un impuls rampă

În majoritatea cazurilor practice, forța aplicată crește de la zero la valoarea nominală F_0 într-un timp (diferit de zero) t_1 , numit *timp de creștere*.

Variația în timp a forței

$$\begin{aligned}
 F(t) &= F_0 \frac{t}{t_1}, & \text{pentru } 0 \leq t \leq t_1, \\
 F(t) &= 0, & \text{pentru } t \geq t_1,
 \end{aligned}
 \tag{2.158}$$

definește un impuls de tip *rampă limitată* (fig. 2.60) sau un impuls de tip treaptă cu timp de creștere t_1 .

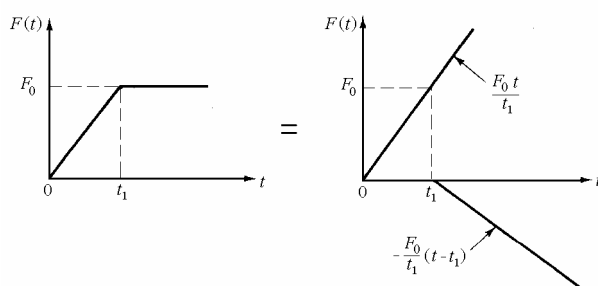


Fig. 2.60

Excitația poate fi considerată ca suma a două funcții de tip rampă

$$F_1(t) = F_0 \frac{t}{t_1} \tag{2.159}$$

și

$$\begin{aligned}
 F_2(t) &= 0 & \text{pentru } 0 \leq t \leq t_1, \\
 F_2(t) &= -F_0 \frac{t-t_1}{t_1}, & \text{pentru } t \geq t_1.
 \end{aligned}
 \tag{2.160}$$

Răspunsul la forța $F_1(t)$, notat $x_1(t)$, se calculează înlocuind expresia (2.159) în integrala lui Duhamel (2.156)

$$x_1(t) = \frac{F_0 \omega_n}{k t_1} \int_0^t \tau \sin \omega_n(t-\tau) d\tau = \frac{F_0}{k} \left(\frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega_n t_1} \sin \omega_n t \right).$$

Similar, răspunsul la forța $F_2(t)$, notat $x_2(t)$, se calculează înlocuind expresia (2.160) în integrala (2.156)

$$x_2(t) = -\frac{F_0}{m \omega_n} \int_{t_1}^t \frac{\tau-t_1}{t_1} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau = -\frac{F_0}{k} \left[\frac{t-t_1}{t_1} - \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1} \right].$$

Răspunsul total, egal cu suma $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, este deci

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(\frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega_n t_1} \sin \omega_n t \right), \quad \text{pentru } t \leq t_1, \quad (2.161)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_1} + \frac{\sin \omega_n (t - t_1)}{\omega_n t_1} \right], \quad \text{pentru } t > t_1. \quad (2.162)$$

Se observă că în cazul aplicării lente (cvasistatice) a forței, când $\omega_n t_1$ are valori mari, oscilațiile sunt mici și răspunsul este aproximativ egal cu valoarea statică.

Din punct de vedere practic, interesează valoarea maximă a răspunsului tranzitoriu. Deoarece de obicei timpii de creștere sunt foarte mici, se poate admite că răspunsul maxim apare la $t = t_m$ care este mai mare ca t_1 . Derivând expresia (2.162) în raport cu timpul și anulând derivata, se obține timpul la care apare deplasarea maximă, exprimat sub formă adimensională

$$\frac{t_m}{t_1} = \frac{1}{\omega_n t_1} \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \omega_n t_1}{\sin \omega_n t_1}. \quad (2.163)$$

Pentru $\omega_n t_m > \pi$ se calculează

$$\begin{aligned} \sin \omega_n t_m &= -\sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos \omega_n t_1)}, \\ \cos \omega_n t_m &= -\frac{\sin \omega_n t_1}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}}. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Înlocuind (2.164) în (2.162) se obține deplasarea maximă raportată la deplasarea statică

$$\frac{x_{max}}{F_0/k} = 1 + \sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - \cos \omega_n t_1}}{\omega_n t_1}, \quad (2.165)$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{x_{max}}{F_0/k} = 1 + \frac{T}{\pi t_1} \left| \sin \frac{\pi t_1}{T} \right|. \quad (2.165, a)$$

În fig. 2.61, *a* se prezintă variația raportului x_{max}/x_{st} în funcție de raportul adimensional

$$\frac{t_1}{T} = \frac{\omega_n t_1}{2\pi}, \quad (2.166)$$

în care T este perioada proprie de vibrație a sistemului masă-arc. În fig. 2.61, *b* se arată variația raportului t_m/T în funcție de t_1/T .

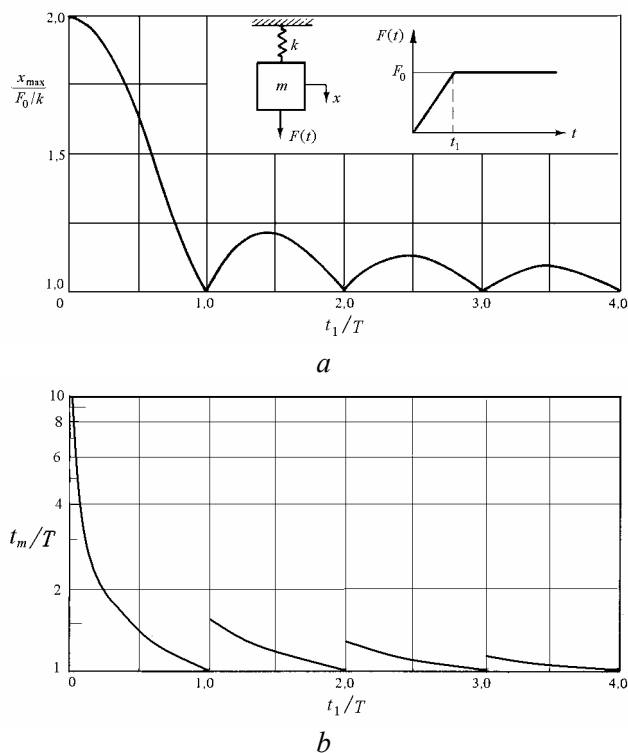


Fig. 2.61

Când $\omega_n t_1 \rightarrow 0$, raportul x_{max}/x_{st} tinde spre 2, valoare obținută pentru forța constantă aplicată brusc. Când $\omega_n t_1 \rightarrow \infty$, acest raport tinde spre 1, valoare corespunzătoare aplicării statice a forței. Când $\cos \omega_n t_1 = 1$, sau $\omega_n t_1 = n\pi$ ($n = 0, 2, 4, \dots$), rampele produc un raport x_{max}/x_{st} egal cu 1, deci răspuns fără vibrații.

2.6.1.3 Răspunsul la un impuls triunghiular descrescător

Se consideră sistemul masă-arc solicitat de o forță $F(t)$ având o variație în timp ca în fig. 2.62, exprimată analitic sub forma

$$F(t) = F_0 \left(1 - \frac{t}{t_d} \right), \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq t_d, \quad (2.167)$$

$$F(t) = 0, \quad \text{pentru } t \geq t_d,$$

unde t_d este durata impulsului.

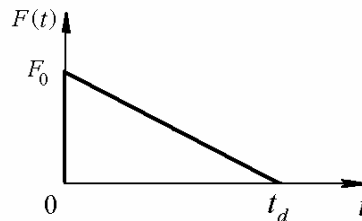


Fig. 2.62

a) *Faza I*. Pentru $t \leq t_d$, deci pe durata cât acționează forța, înlocuind expresia (2.167) în (2.156), deci pentru condiții inițiale nule, după efectuarea calculelor rezultă

$$x(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_n t) + \frac{F_0 t}{k t_d} \left(\frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t} - 1 \right). \quad (2.168)$$

b) *Faza II*. Pentru $t \geq t_d$, deci după încetarea acțiunii forței, condițiile inițiale ale mișcării se determină înlocuind $t = t_d$ în expresia (2.168) și în expresia derivatei acesteia în raport cu timpul. Se obține

$$x(t_d) = x_0 = \frac{F_0}{k} \left(\frac{\sin \omega_n t_d}{\omega_n t_d} - \cos \omega_n t_d \right), \quad (2.169)$$

$$\dot{x}(t_d) = v_0 = \frac{F_0}{k} \left(\omega_n \cdot \sin \omega_n t_d + \frac{\cos \omega_n t_d}{t_d} - \frac{1}{t_d} \right). \quad (2.170)$$

Substituind expresiile (2.169) și (2.170) în ecuația mișcării libere neamortizate (2.6) și înlocuind $t \rightarrow (t - t_d)$, se obține

$$x(t) = \frac{F_0}{k \omega_n t_d} [\sin \omega_n t_d - \sin \omega_n (t - t_d)] - \frac{F_0}{k} \cos \omega_n t. \quad (2.171)$$

Anulând derivata în raport cu timpul a funcției $x(t)$, se obține timpul t_m , măsurat din momentul aplicării forței, după care apare răspunsul maxim. Înlocuind această valoare în expresia deplasării, se obține răspunsul maxim

$$x_{max} = x(t_m). \quad (2.172)$$

Pentru impulsuri de foarte scurtă durată ($t_d/T < 0,4$), răspunsul maxim apare în faza răspunsului liber (faza II). Altfel, el apare pe durata aplicării impulsului (faza I).

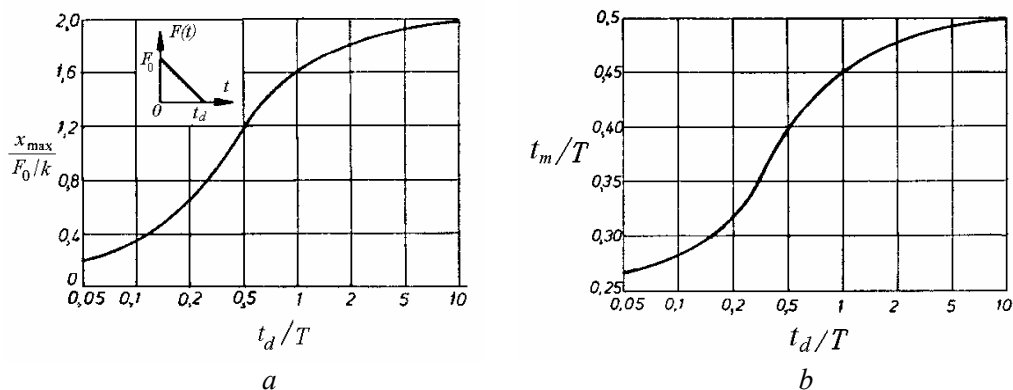


Fig. 2.63

În fig. 2.63, *a* se prezintă variația răspunsului maxim în funcție de raportul t_d/T , unde $T = 2\pi/\omega_n$ este perioada proprie de vibrație a sistemului. În fig. 2.63, *b* se arată variația raportului t_m/T în funcție de t_d/T .

Aceste diagrame sunt deosebit de utile în proiectare, deoarece este suficient să se cunoască perioada proprie de vibrație T și durata impulsului t_d pentru a se calcula timpul de răspuns maxim t_m și valoarea răspunsului maxim.

2.6.1.4 Răspunsul la un impuls dreptunghiular

Se consideră sistemul masă-arc solicitat de o forță $F(t)$ având o variație în timp ca în fig. 2.64, exprimată analitic sub forma

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0, & \text{pentru } 0 \leq t \leq t_d, \\ F(t) &= 0, & \text{pentru } t \geq t_d, \end{aligned} \quad (2.173)$$

unde t_d este durata impulsului.

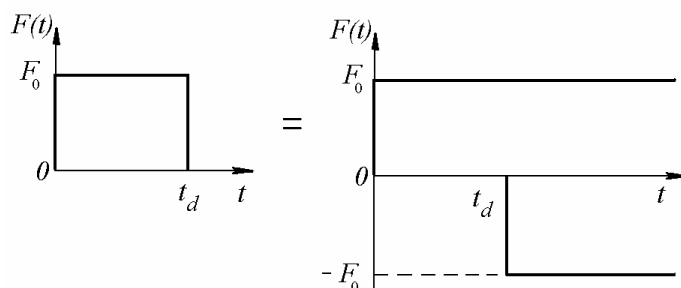


Fig. 2.64

Aplicarea forței F_0 pe durata t_d este echivalentă cu aplicarea bruscă a forței F_0 la momentul $t = 0$, urmată de aplicarea bruscă a forței $-F_0$ la momentul $t = t_d$. Deplasarea produsă de prima forță este de forma (2.157)

$$x_1(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t).$$

Deplasarea produsă de a doua forță, pentru $t > t_d$, se obține înlocuind F_0 cu $-F_0$ și t cu $t - t_d$ în (2.157)

$$x_2(t) = -\frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n (t - t_d)].$$

Deplasarea totală este $x = x_1$ pentru $0 \leq t \leq t_d$, iar pentru $t \geq t_d$ este

$$x(t) = x_1 + x_2 = \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n (t - t_d) - \cos \omega_n t]$$

sau

$$x(t) = 2 \frac{F_0}{k} \sin \frac{\omega_n t_d}{2} \sin \omega_n \left(t - \frac{t_d}{2} \right). \quad (2.174)$$

În fig. 2.65, *a* se prezintă variația răspunsului maxim în funcție de raportul t_d/T , iar în fig. 2.65, *b* se arată variația raportului t_m/T în funcție de t_d/T .

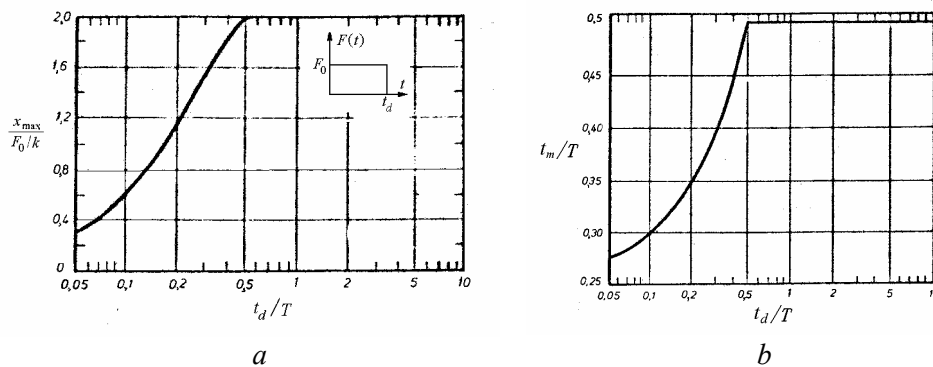


Fig. 2.65

Se observă că dacă durata aplicării forței este mai mare decât semiperioada proprie de vibrație, deplasarea atinge valoarea maximă $x_{max} = 2x_{st}$ încă în timpul aplicării impulsului dreptunghiular. Dacă $t_d < T/2$, atunci deplasarea maximă se

obține după încetarea acțiunii impulsului dreptunghiular și are valoarea

$$x_{max} = 2x_{st} \sin \frac{\omega_n t_d}{2} .$$

2.6.2 Răspunsul la excitație prin șoc aplicată suportului

Sistemul din fig. 2.66 este excitat la bază cu accelerația \ddot{u} .

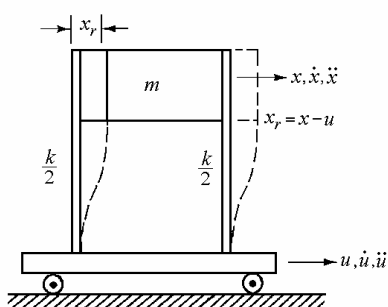


Fig. 2.66

Ecuția mișcării masei m se scrie

$$m \ddot{x} + k(x - u) = 0 , \quad (2.175)$$

$$m (\ddot{u} + \ddot{x}_r) + k x_r = 0 ,$$

sau

$$m \ddot{x}_r + k x_r = -m \ddot{u} . \quad (2.176)$$

În ecuația deplasării relative, membrul drept are rolul forței din ecuația deplasării absolute a masei sub acțiunea unei forțe exterioare aplicate masei.

Rezultă că în cazul excitației cinematice la bază cu accelerația \ddot{u} , deplasarea relativă a masei se poate calcula cu integrala lui Duhamel (2.21) în care forța $F(\tau)$ se înlocuiește cu $-m\ddot{u}(\tau)$

$$x_r(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau . \quad (2.177)$$

Accelerația relativă a masei este

$$\ddot{x}_r = -\omega_n^2 x_r = \omega_n \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau . \quad (2.178)$$

2.6.2.1 Răspunsul la un impuls triunghiular simetric

Se consideră sistemul din fig. 2.66 excitat la bază cu accelerația $\ddot{u}(t)$ având o variație în timp ca în fig. 2.67, exprimată analitic sub forma

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= a \frac{2}{t_d} t, & \text{pentru } 0 \leq t \leq \frac{t_d}{2}, \\ \ddot{u}(t) &= a \frac{2}{t_d} (t_d - t), & \text{pentru } \frac{t_d}{2} \leq t \leq t_d. \end{aligned} \quad (2.179)$$

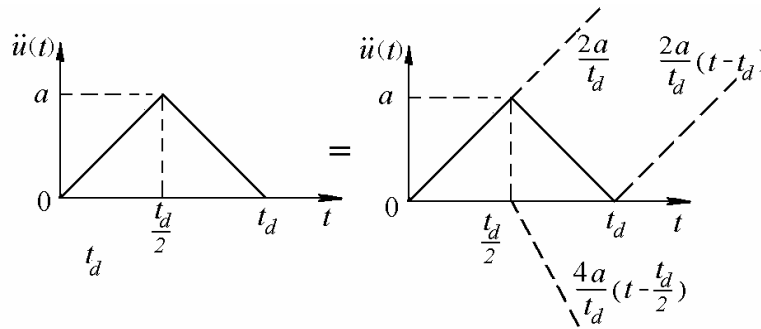


Fig. 2.67

Impulsul triunghiular simetric poate fi considerat suma a trei funcții de tip rampă (fig. 2.67). Suprapunând răspunsurile calculate cu integrala lui Duhamel stabilită pentru condiții inițiale nule, cu înlocuirea argumentului întârziat, se obțin următoarele expresii pentru accelerația relativă a masei

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{2}{t_d} \left(t - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{t_d}{2}, \quad (2.180)$$

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{2}{t_d} \left\{ t_d - t + \frac{1}{\omega_n} \left[2 \sin \omega_n \left(t - \frac{t_d}{2} \right) - \sin \omega_n t \right] \right\}, \quad \frac{t_d}{2} \leq t \leq t_d, \quad (2.181)$$

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{2}{\omega_n t_d} \left[2 \sin \omega_n \left(t - \frac{t_d}{2} \right) - \sin \omega_n t_d - \sin \omega_n (t - t_d) \right], \quad t \geq t_d. \quad (2.182)$$

În fig. 2.68 se prezintă variația în timp accelerației relative a masei pentru trei valori diferite ale raportului $t_d/T = \omega_n t_d / 2\pi$.

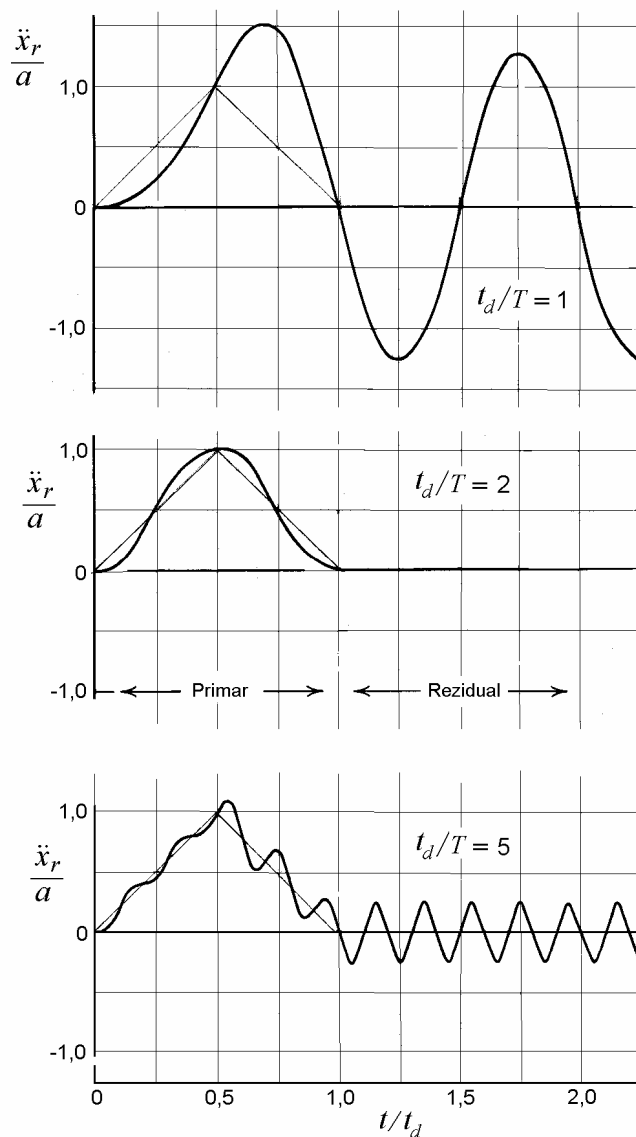


Fig. 2.68

Pentru un șoc de durată finită, se definesc două faze distincte: a) “șocul inițial”, care definește de fapt “răspunsul inițial” pe durata aplicării șocului, care este o vibrație forțată și b) “șocul rezidual”, care definește “răspunsul rezidual” după încetarea acțiunii șocului, care este o vibrație liberă.

Se observă că pentru $t_d/T = 2$ nu apar vibrații reziduale. Pentru $t_d/T = 1$, răspunsul primar maxim apare la $t_m/t_d = 0,605$.

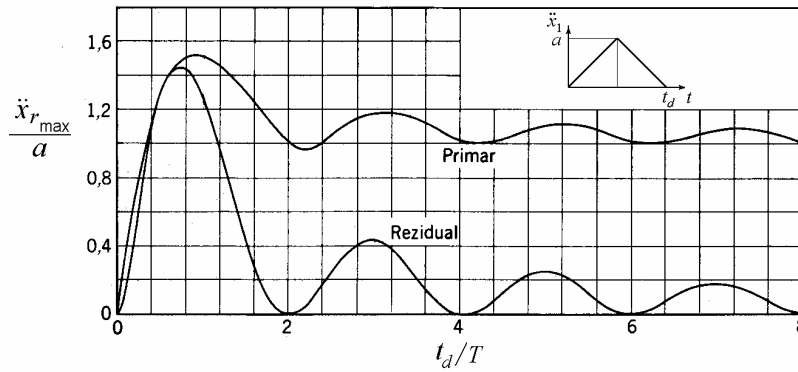


Fig. 2.69

În general interesează valoarea răspunsului maxim, în acest caz – accelerația relativă maximă a masei, pentru diferite valori ale raportului t_d/T . În fig. 2.69 se arată variația accelerației maxime în funcție de raportul adimensional t_d/T , separat pentru șocul primar și pentru șocul rezidual.

2.6.2.2 Răspunsul la un impuls semisinusoidal

În fig. 2.70 se prezintă un impuls semisinusoidal exprimat analitic sub forma

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= a \sin \frac{\pi t}{t_d}, & \text{pentru } 0 \leq t \leq t_d, \\ \ddot{u}(t) &= 0, & \text{pentru } t_d \leq t. \end{aligned} \tag{2.183}$$

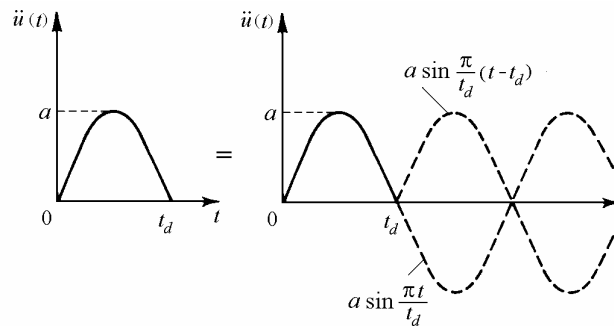


Fig. 2.70

Impulsul poate fi considerat rezultatul suprapunerii a două accelerații sinusoidale, una aplicată la $t = 0$, a doua aplicată la $t = t_d$.

Se obțin următoarele expresii pentru variația în timp a accelerației relative a masei

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{4t_d^2}} \left(\sin \frac{\pi t}{t_d} - \frac{T}{2t_d} \sin \omega_n t \right), \quad 0 \leq t \leq t_d, \quad (2.184)$$

$$\frac{\ddot{x}_r(t)}{a} = \frac{T \cos \frac{\pi t_d}{2}}{t_d \left(1 - \frac{T^2}{4t_d^2} \right)} \sin \omega_n \left(t - \frac{t_d}{2} \right), \quad t_d \leq t. \quad (2.185)$$

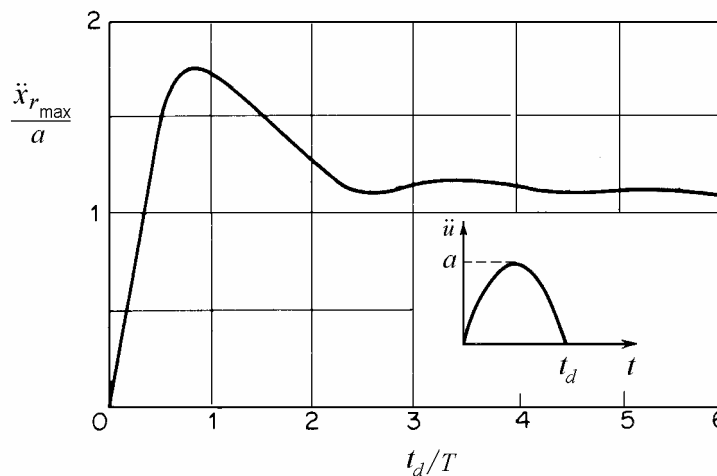


Fig. 2.71

În fig. 2.71 s-a reprezentat variația răspunsului primar maxim în funcție de raportul t_d/T .

2.6.3 Spectrul răspunsului la șoc

Din punct de vedere practic, este preferabilă descrierea unui șoc sau a unei excitații tranzitorii prin efectul pe care îl are asupra unui sistem cu un grad de libertate, decât prin funcția de timp a excitației.

Valoarea maximă a răspunsului la șoc a fost reprezentată grafic în funcție de raportul între durata șocului și perioada proprie de vibrație a sistemului cu un grad de libertate neamortizat, t_d/T . Acest raport se mai poate scrie

$t_d/T = \omega_n t_d / 2\pi$, deci este proporțional cu produsul între durata șocului și pulsația proprie a sistemului cu un grad de libertate.

Curba răspunsului maxim în funcție de pulsația proprie a sistemului masă-arc se numește *spectrul șocului* sau *spectrul răspunsului*. A doua denumire include și *spectrul răspunsului tranzitoriu*, la o excitație de durată finită mai lungă decât perioada proprie a sistemului masă-arc. Diagramele din figurile 2.61,a, 2.63,a, 2.65,a, 2.69 și 2.71 sunt deci *spectre de șoc*. Ele descriu fie răspunsul maxim al unui sistem masă-arc dat, la șocuri de diferite durate, fie răspunsul sistemelor cu diferite pulsații proprii la un șoc cu o anumită durată.

Dacă se calculează valoarea maximă a răspunsului la șoc pentru sisteme masă-arc cu diferite pulsații proprii și se reprezintă grafic valorile răspunsului tranzitoriu maxim în funcție de pulsația proprie a oscilatorului, se obține spectrul șocului.

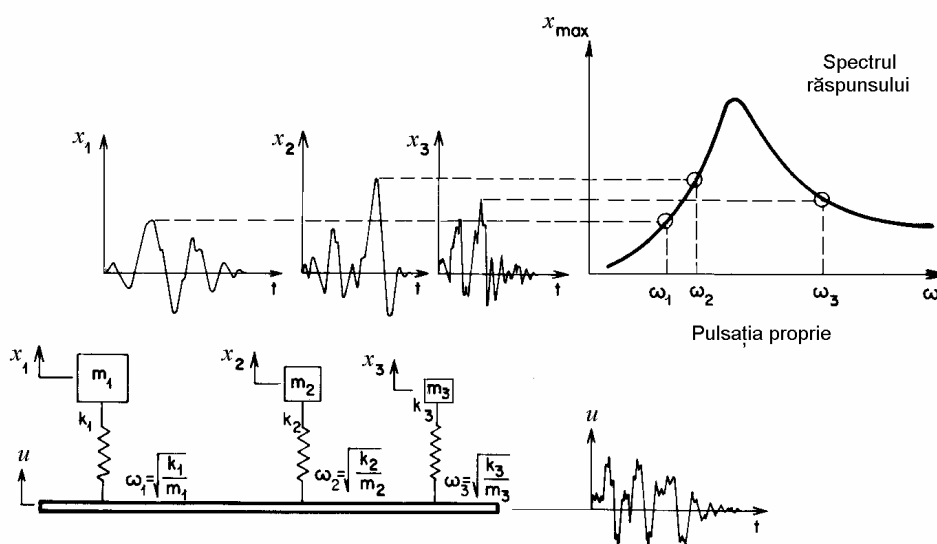


Fig. 2.72

Procedeul este reprezentat schematic în fig. 2.72. Pentru un număr infinit de oscilatori (sau același oscilator cu pulsație proprie variabilă continuu) se obține un spectru continuu al șocului considerat. Dacă oscilatorii sunt amortizați, în spectrul șocului se obține câte o curbă pentru fiecare valoare a raportului de amortizare.

Fiecare impuls are un spectru de șoc caracteristic, dar este posibil ca impulsuri cu funcții de timp diferite să aibă același spectru de șoc. Din acest motiv, funcția de timp a șocului nu poate fi reconstituită din spectrul său de răspuns.

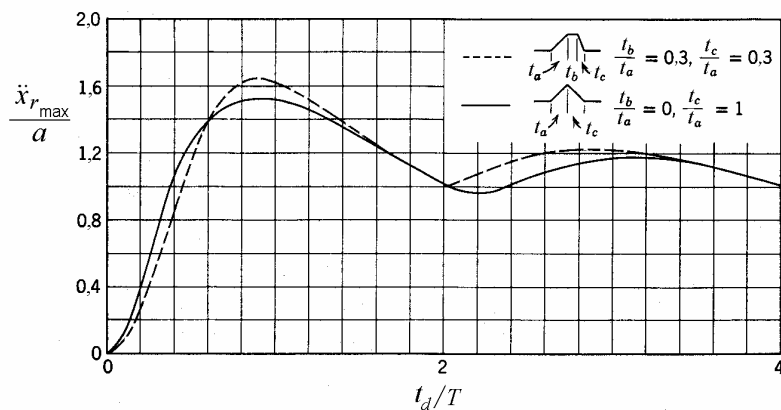


Fig. 2.73

Efectul unui șoc descris de o anumită funcție de timp poate fi simulat cu o mașină pentru încercări la șoc care s-ar putea să nu poată reproduce exact funcția de timp a șocului respectiv, dar poate produce un șoc echivalent, descris de o funcție de timp diferită, care să aibă aproximativ același spectru de răspuns. De exemplu, dacă trebuie simulat un șoc triunghiular simetric, acesta poate fi aproximat cu un șoc trapezoidal cu raportul între timpul de menținere și timpul de creștere $t_b/t_a = 0,3$ și raportul între timpul de descreștere și timpul de creștere $t_c/t_a = 0,3$, așa cum se arată în fig. 2.73.

Pentru spectre descrise de funcții de timp mai complicate, integrala lui Duhamel și spectrul răspunsului se calculează prin metode numerice. Spectrele răspunsului sunt utilizate în încercările la șoc și în calificarea seismică a echipamentelor.

Probleme

2.E1 O masă necunoscută m este atașată unui arc de rigiditate k necunoscută. Dacă o masă $m_1 = 0,5$ kg este adăugată masei m , frecvența proprie a sistemului scade de la 50 Hz la 49 Hz. a) Să se determine valorile parametrilor m și k . Dacă un arc de rigiditate k' se montează în paralel cu primul arc, frecvența proprie a sistemului crește la 50 Hz. b) Să se determine k' .

Răspuns: $m = 12,126$ kg, $k = 1,19 \cdot 10^6$ N/m, $k' = 56$ N/m.

2.E2 O masă $m = 0,5$ kg vibrează liber într-un mediu vâscos cu perioada $T = 0,15$ sec și amplitudinea inițială $a_0 = 10$ mm. a) Să se determine rigiditatea k și coeficientul de amortizare vâscosă c dacă după 12 cicluri amplitudinea vibrațiilor

este $a_{12} = 0,2$ mm. b) Să se determine amplitudinea a'_{12} după 12 cicluri dacă se atașează o masă $m_1 = 0,3$ kg masei inițiale m .

Răspuns: $k = 877$ N/m, $c = 2,173$ Ns/m, $a'_{12} = 0,45$ mm.

2.E3 Un sistem masă-arc cu frecvența proprie $f = 5$ Hz vibrează într-un mediu vâscos cu un coeficient de amortizare $c = 0,002$ Ns/mm. Decrementul logaritmic este $\delta = 0,31$. a) Să se determine masa m și rigiditatea arcului k . b) Care este noua valoare a decrementului logaritmic dacă se atașează masei inițiale o masă $m_1 = 1$ kg.

Răspuns: $m = 0,645$ kg, $k = 636,4$ N/m, $\delta' = 0,194$.

2.E4 Un sistem masă-arc-amortizor vâscos este deplasat o distanță $a_0 = 20$ mm apoi lăsat liber. După 8 cicluri de vibrație amplitudinea descrește la $a'_8 = 4$ mm. O masă $m_1 = 2$ kg atașată masei inițiale produce o deplasare statică de 4 mm. Dacă noul sistem este deplasat o distanță $a_0 = 20$ mm apoi lăsat liber, după 8 cicluri de vibrație amplitudinea descrește la $a''_8 = 5$ mm. Să se determine masa m , rigiditatea k și coeficientul de amortizare c .

Răspuns: $m = 5,77$ kg, $k = 4905$ N/m, $c = 10,76$ Ns/m.

2.E5 Un sistem vibrator cu masa $m = 5$ kg și rigiditatea arcului $k = 1$ N/mm este acționat de o forță armonică de amplitudine $F_0 = 10$ N și frecvență 2 Hz. Să se determine: a) amplitudinea deplasării X ; b) amplitudinea deplasării X' dacă o masă $m_1 = 2$ kg este adăugată masei m ; c) pentru sistemul cu masa adițională, cum trebuie modificat k astfel încât deplasarea să revină la valoarea X .

Răspuns: $X = 47,34$ mm, $X' = 95,85$ mm, se adaugă $k' = 315,5$ N/m în paralel, sau $k' = 8546,5$ N/m în serie cu k .

2.E6 O greutate $mg = 20$ N atașată unui arc moale îl lungește 1 mm. a) Să se determine amplitudinea F_0 a forței care, acționând cu frecvența 20 Hz, produce vibrații cu amplitudinea deplasării $X = 3,5$ mm. b) Să se determine o altă frecvență excitatoare la care forța de amplitudine F_0 produce aceeași deplasare $X = 3,5$ mm.

Răspuns: $F_0 = 42,68$ N, $\omega' = 61,87$ rad/s.

2.E7 Un rotor cu masa $m = 2 \text{ kg}$ transmite o forță de 14 N arcurilor pe care este rezemat când se rotește cu viteza unghiulară de 30 rad/s și are o amplitudine a precesiei de $3,5 \text{ mm}$. a) Să se determine amplitudinea F_0 a forței de dezechilibru; b) Să se determine o altă valoare a vitezei unghiulare la care amplitudinea vibrațiilor are aceeași valoare.

Răspuns: $F_0 = 7,7 \text{ N}$, $\omega' = 55,67 \text{ rad/s}$.

2.E8 Un aparat sensibil cu masa $m = 1 \text{ kg}$ este folosit pe o platformă care vibrează datorită undelor transmise de la o sursă din apropiere. Platforma are o mișcare armonică cu amplitudinea $X_1 = 0,2 \text{ mm}$ și frecvența $f = 15 \text{ Hz}$. Pentru a reduce vibrațiile transmise aparatului, între acesta și platformă se introduc izolatori din cauciuc cu rigiditatea totală $k = 7000 \text{ N/m}$. Să se determine: a) amplitudinea X a deplasării aparatului; b) valoarea X' a amplitudinii vibrațiilor aparatului, dacă în paralel cu primii izolatori se mai adaugă un izolator cu rigiditatea $k' = 2000 \text{ N/m}$.

Răspuns: $X = 0,743 \text{ mm}$, $X' = 15,15 \text{ mm}$.

2.E9 O masă $m = 4 \text{ kg}$, suspendată cu două arcuri verticale între două suporturi fixe, este acționată de o forță armonică cu amplitudinea $F_0 = 10 \text{ N}$. Arcul superior are o rigiditate $k = 5000 \text{ N/m}$ iar arcul inferior are o rigiditate $2k$. Să se determine: a) frecvențele la care amplitudinea deplasării este $X = 20 \text{ mm}$, și b) amplitudinea F'_0 a forței transmise suportului inferior prin arcul $2k$.

Răspuns: $\omega_1 = 60,2 \text{ rad/sec}$, $\omega_2 = 62,25 \text{ rad/sec}$, $F'_0 = 200 \text{ N}$.

2.E10 Un sistem vibrator neamortizat are o masă echivalentă m și o rigiditate echivalentă k . O forță armonică de amplitudine $F_0 = 1 \text{ N}$ și pulsație $\omega = 14 \text{ rad/s}$ produce vibrații staționare de amplitudine X . Dacă se adaugă o masă $m_1 = 2 \text{ kg}$ masei inițiale m , forța de amplitudine $F_0 = 1 \text{ N}$ trebuie să aibă o pulsație $\omega = 10 \text{ rad/s}$ sau $\omega = 12 \text{ rad/s}$ pentru a produce o deplasare cu aceeași amplitudine X . Să se determine valorile parametrilor m și k .

Răspuns: Pentru $\omega < \omega_1$, $m = 2,083 \text{ kg}$, $k = 498,1 \text{ N/m}$; pentru $\omega > \omega_1$, $m = 5,538 \text{ kg}$, $k = 919,6 \text{ N/m}$.

2.E11 Un motor electric cu greutatea $mg = 12000 \text{ N}$ este montat la mijlocul unei bare de lungime $\ell = 2 \text{ m}$ simplu rezemată la capete, cu moment de inerție axial al secțiunii transversale $I = 20 \text{ mm}^4$ și modulul de elasticitate longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$. Dacă motorul are o greutate dezechilibrată în

rotație $m_0g = 2000 \text{ N}$ cu excentricitatea $e = 0,1 \text{ mm}$ și turația $n = 1500 \text{ rot/min}$, să se determine: a) amplitudinea X a vibrațiilor forțate ale mașinii, și b) amplitudinea forței dinamice transmise unui reazem.

Răspuns: $X = 50,22 \mu\text{m}$, $F_{din} = 632,77 \text{ N}$.

2.E12 Un motor cu masa $m = 10 \text{ kg}$, rezemat pe arcuri cu rigiditatea totală $k = 2000 \text{ N/m}$, produce o forță dezechilibrată de amplitudine $F_0 = 20 \text{ N}$ la frecvența de 2 Hz . Să se determine rigiditatea k' a unui arc și modul de legare a acestuia (în serie sau în paralel) pentru a reduce la jumătate amplitudinea forței transmise F_{T0} . Să se determine valoarea altei pulsații la care forța dezechilibrată are același efect.

Răspuns: $k' = 731,6 \text{ N/m}$ în paralel, $\omega' = 10,75 \text{ rad/s}$.

2.E13 Un sistem vibrator compus din o masă $m = 0,2 \text{ kg}$ și un arc de rigiditate $k = 0,2 \text{ N/mm}$ este acționat de o forță armonică de amplitudine $F_0 = 5 \text{ N}$ și pulsație $\omega = 35 \text{ rad/s}$. Să se determine: a) amplitudinea F_{T0} a forței transmise suportului de la bază, și b) amplitudinea X a deplasării masei m .

Răspuns: $F_{T0} = 22,22 \text{ N}$, $X = 0,11 \text{ m}$.

2.E14 Un sistem masă-arc cu amortizare vâscoasă este acționat de o forță armonică de amplitudine $F_0 = 10 \text{ N}$. Variind pulsația forței excitatoare, se obține o amplitudine maximă $X_1 = 60 \text{ mm}$ la pulsația de rezonanță $\omega_1 = 14 \text{ rad/s}$. Dacă se atașează sistemului o masă $m_1 = 2 \text{ kg}$, amplitudinea maximă devine $X_2 = 80 \text{ mm}$. Să se determine masa m , rigiditatea k și coeficientul de amortizare c .

Răspuns: $m = 2,57 \text{ kg}$, $k = 503,72 \text{ N/m}$, $c = 11,9 \text{ Ns/m}$.

2.E15 O masă $m = 5 \text{ kg}$ este atașată de un arc cu rigiditatea $k = 1 \text{ N/mm}$ și este acționată de o forță armonică de amplitudine $F_0 = 10 \text{ N}$ și frecvență $f = 2 \text{ Hz}$. Să se determine: a) amplitudinea X_1 a vibrațiilor forțate ale masei m ; b) amplitudinea X_2 a vibrațiilor forțate când o masă $m_1 = 2 \text{ kg}$ este adăugată masei m ; c) coeficientul de amortizare vâscoasă c al unui amortizor legat în paralel cu arcul și care reduce amplitudinea vibrațiilor la valoarea inițială.

Răspuns: $X_1 = 47,3 \text{ mm}$, $X_2 = 92,5 \text{ mm}$, $c = 10,3 \text{ Ns/m}$.

2.E16 Utilizând metoda lui Rayleigh, să se calculeze pulsația proprie fundamentală a barelor din fig. 2.74, folosind deformata aproximativă dată alăturat.

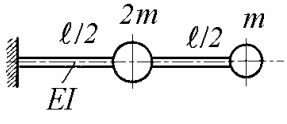
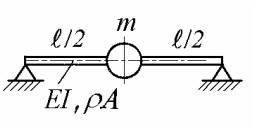
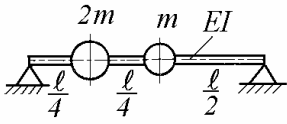
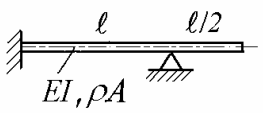
a		$v(x) = v_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$.
b		$v(x) = v_0 \left[3 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$, $0 \leq x \leq l/2$
c		$v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{l}$.
d		$v(x) = v_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$.

Fig. 2.74

Răspuns: a) $\omega_1 = 1,612 \sqrt{\frac{EI}{m \ell^3}}$; b) $\omega_1 = 6,928 \sqrt{\frac{EI}{m \ell^3 (1 + 0,4857 \rho A \ell / m)}}$;

c) $\omega_1 = 4,935 \sqrt{\frac{EI}{m \ell^3}}$; d) $\omega_1 = \frac{22,79}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$.

2.E17 Utilizând metoda lui Rayleigh, să se calculeze pulsația proprie fundamentală a vibrațiilor axiale ale barei din fig. 2.75 folosind o funcție cu variație liniară deplasărilor longitudinale. Se consideră $m = 2 \rho A \ell$.

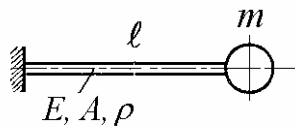


Fig. 2.75

Răspuns: $\omega_1 = \frac{0,655}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

3.

SISTEME CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem în vibrație este egal cu numărul coordonatelor independente necesare pentru a descrie complet mișcarea sistemului.

În acest capitol se studiază sistemele cu două grade de libertate, fiind cel mai simplu caz de sistem discret, și o introducere în studiul sistemelor cu un număr finit de grade de libertate. În acest scop se introduce notația matricială, care de fapt nu este necesară studiului sistemelor cu numai două grade de libertate.

În capitolul 2 se arată că vibrația liberă a unui sistem neamortizat cu un grad de libertate este o mișcare armonică la *frecvența proprie* a sistemului, numită *vibrație proprie* (naturală). În schimb, vibrația liberă a unui sistem neamortizat cu mai multe grade libertate este o *mișcare periodică*, și constă din suma mai multor vibrații proprii simultane, fiecare implicând o anumită frecvență proprie și formă deformată, numite *moduri proprii* (naturale) de vibrație. Mișcarea într-un mod propriu de vibrație este sincronă și armonică în toate coordonatele sistemului.

Răspunsul dinamic al unui sistem discret poate fi descris de un sistem de ecuații diferențiale ordinare simultane. Printr-o alegere judicioasă a coordonatelor, numite *coordonate modale* sau *principale*, ecuațiile pot fi decuplate și rezolvate independent una de alta. Coordonatele modale reprezintă combinații liniare ale deplasărilor reale. Invers, mișcarea sistemului poate fi privită ca o suprapunere de vibrații în modurile proprii definite de coordonatele modale.

Un sistem cu două grade de libertate are două frecvențe proprii și, în vibrații forțate, pentru amortizări reduse, poate avea două rezonanțe. Răspunsul liber la o excitație inițială și răspunsul forțat la o excitație externă pot fi exprimate în funcție de cele două moduri proprii de vibrație ale căror forme deformată sunt definite de vectori ortogonali, ponderați de matricile de masă sau de rigiditate. Răspunsul forțat la excitație armonică se poate obține ușor utilizând regula lui Cramer. Rezonanța apare atunci când frecvența excitatoare devine egală cu una dintre frecvențele proprii ale sistemului. Antirezonanța poate apare la o frecvență egală cu frecvența proprie a unui subsistem masă-arc.

În acest capitol se discută în primul rând calculul frecvențelor proprii și al formei modurilor proprii de vibrație. Vibrațiile forțate sunt analizate întâi pentru sisteme neamortizate, folosind analiza modală și analiza spectrală directă, apoi pentru sisteme amortizate.

3.1 Vibrații de translație

În continuare se studiază sisteme masă-arc cu două grade de libertate, în care masele au mișcare de translație unidirecțională.

3.1.1 Ecuațiile de mișcare

Se consideră sistemul din fig. 3.1, *a* compus din masele m_1 și m_2 , atașate de puncte fixe prin arcurile k_1 și k_3 , și cuplate între ele prin arcul k_2 .

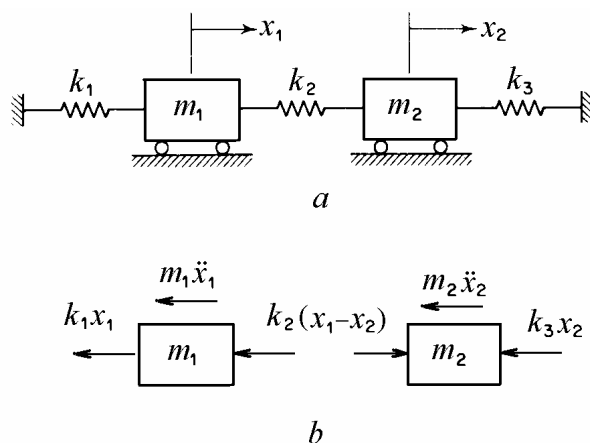


Fig. 3.1

Dacă masele sunt ghidate să se miște pe o singură direcție orizontală, configurația sistemului la un moment dat este complet determinată de deplasările instantanee x_1 și x_2 față de pozițiile de echilibru static. Sistemul are două grade de libertate.

Cu ajutorul diagramelor forțelor din fig. 3.1, *b* și folosind principiul lui d'Alembert (echilibrul dinamic al forțelor de inerție și al celor efectiv aplicate), ecuațiile de mișcare se pot scrie

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 - k_2 (x_1 - x_2) &= 0, \end{aligned}$$

sau sub forma

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_3 + k_2) x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Acesta este un sistem de două ecuații diferențiale liniare “cuplate”, cu coeficienți constanți. Cuplajul între cele două coordonate este produs de arcul k_2 . Dacă $k_2 = 0$, ecuațiile (3.1) devin independente, iar sistemul din fig. 3.1 degenerază în două sisteme vibratoare cu câte un grad de libertate.

Ecuțiile (3.1) se pot scrie matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

sau în formă compactă

$$[m] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{0\}, \quad (3.3)$$

unde $[m]$ este *matricea de masă*, $[k]$ este *matricea de rigiditate* iar $\{x\}$ este *vectorul coloană al deplasărilor*. De notat că matricile pătrate sunt notate cu paranteze drepte iar vectorii coloană sunt notați cu acolade. Matricea de masă și matricea de rigiditate sunt simetrice, deci egale cu transpusele lor

$$[m] = [m]^T, \quad [k] = [k]^T. \quad (3.4)$$

Matricea maselor este diagonală. Cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricii de rigiditate.

3.1.2 Vibrații libere. Moduri proprii de vibrație

Interesează în ce condiții cele două mase au mișcări armonice sincrone, când sistemul se comportă ca un sistem cu un grad de libertate în vibrații proprii.

Se aleg soluții de forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 \cos(\omega t - \varphi), \\ x_2(t) &= a_2 \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

și se studiază în ce condiții o astfel de mișcare este posibilă. În această mișcare, raportul între deplasările instantanee ale maselor este constant în timp

$$x_1(t)/x_2(t) = a_1/a_2 = \text{const.} \quad (3.6)$$

Configurația sistemului nu se modifică în timp, forma deformată rămâne asemenea cu ea însăși în orice moment.

Înlocuind soluțiile (3.5) în ecuațiile diferențiale (3.1), rezultă sistemul algebric omogen

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) a_1 - k_2 a_2 &= 0, \\ -k_2 a_1 + (k_3 + k_2 - m_2 \omega^2) a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ecuațiile omogene simultane (3.7) au soluții nebanale (diferite de zero) dacă determinantul coeficienților a_1 și a_2 este zero

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

Dezvoltând determinantul se obține

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_3 + k_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{k_1 k_3 + (k_1 + k_3) k_2}{m_1 m_2} = 0 \quad (3.9)$$

care este o ecuație de gradul doi în ω^2 numită *ecuația caracteristică* sau *ecuația pulsațiilor proprii*. Rădăcinile ω_1^2 și ω_2^2 sunt reale și pozitive. Mărimile ω_1 și ω_2 se numesc *pulsații proprii* sau *pulsații naturale*, deoarece depind doar de masele și rigiditățile sistemului.

Deoarece sistemul ecuațiilor (3.7) este omogen, nu pot fi determinate amplitudinile a_1 și a_2 , ci numai raportul acestora $\mu = a_2/a_1$.

La pulsația ω_1 , raportul amplitudinilor este

$$\mu_1 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_1 = \frac{k_3 + k_2 - m_2 \omega_1^2}{k_2} \quad (3.10)$$

iar la pulsația ω_2 , raportul amplitudinilor este

$$\mu_2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_2 = \frac{k_3 + k_2 - m_2 \omega_2^2}{k_2}. \quad (3.11)$$

Rapoartele (3.10) și (3.11) determină forma deformată a sistemului în mișcările sincrone cu pulsațiile ω_1 , respectiv ω_2 . Dacă se dă o valoare arbitrară unui element din fiecare raport (de exemplu, numitorului), valoarea celuilalt element rezultă din expresiile de mai sus. Acest proces se numește *normalizare*.

Pulsațiile proprii și rapoartele amplitudinilor corespunzătoare determină condițiile în care pot avea loc mișcări armonice sincrone ale celor două mase, adică *moduri proprii de vibrație*. Un mod propriu de vibrație este definit de doi parametri: pulsația proprie și forma modală. Formele modale pot fi reprezentate prin vectorii coloană

$$\begin{aligned} \{a\}_1 &= \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}_1 = (a_1)_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = C_1 \{u\}_1, \\ \{a\}_2 &= \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}_2 = (a_1)_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = C_2 \{u\}_2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

numiți și *vectori modali*.

În relațiile (3.12) vectorii modali sunt normalizați cu primul element egal cu 1. Se spune că vectorii normalizați reprezintă forma *modurilor normale* de vibrație.

Cele două mișcări sincrone posibile sunt date de

$$\begin{aligned} \{x(t)\}_1 &= C_1 \{u\}_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \\ \{x(t)\}_2 &= C_2 \{u\}_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

iar soluția generală a vibrațiilor libere este

$$\{x(t)\} = \{x(t)\}_1 + \{x(t)\}_2 = C_1 \{u\}_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + C_2 \{u\}_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \quad (3.14)$$

În expresia (3.14), cele patru constante de integrare C_1 , C_2 , φ_1 , φ_2 se determină utilizând cele patru condiții inițiale, desplasările și vitezele la $t = 0$.

Pentru condiții inițiale arbitrare, vibrația liberă a unui sistem cu două grade de libertate este o mișcare *periodică* obținută din suprapunerea a două moduri proprii de vibrație, adică a două mișcări *armonice* cu pulsații egale cu pulsațiile proprii ale sistemului. Se poate arăta că pentru viteze inițiale nule și deplasări inițiale proporționale cu cele dintr-un mod propriu de vibrație, mișcarea liberă este sincronă și pur armonică, la pulsația proprie a modului respectiv. *Un sistem poate vibra liber într-un mod propriu de vibrație dacă forma deformată inițială este asemenea cu forma modului respectiv.*

Exemplul 3.1

Se cer modurile proprii de vibrație ale sistemului din fig. 3.2.

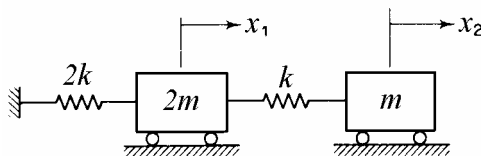


Fig. 3.2

Rezolvare. Ecuațiile de mișcare se pot scrie

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Presupunând soluții de forma

$$\{x\} = \{u\} \cos(\omega t - \varphi)$$

se obține sistemul algebric omogen

$$\begin{aligned} (3k - 2\omega^2 m)u_1 - ku_2 &= 0, \\ -ku_1 + (k - \omega^2 m)u_2 &= 0, \end{aligned}$$

sau, împărțind prin k ,

$$\begin{aligned} (3 - 2\alpha)u_1 - u_2 &= 0, \\ -u_1 + (1 - \alpha)u_2 &= 0, \end{aligned}$$

unde s-a notat

$$\alpha = m\omega^2/k.$$

Condiția de a avea soluții nebanale este

$$\begin{vmatrix} 3 - 2\alpha & -1 \\ -1 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad 2\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0,$$

cu rădăcinile

$$\alpha_1 = 1/2, \quad \alpha_2 = 2.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Alegând primul element egal cu 1, primul vector modal este dat de

$$\begin{bmatrix} 3 - 2\alpha_1 & -1 \\ -1 & 1 - \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

iar al doilea vector modal este calculat din

$$\begin{bmatrix} 3 - 2\alpha_2 & -1 \\ -1 & 1 - \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Forma modurilor proprii de vibrație este prezentată în fig. 3.3. În primul mod de vibrație, cele două mase se deplasează în aceeași direcție, amândouă spre

dreapta sau amândouă spre stânga, deplasarea masei m fiind dublă față de deplasarea masei $2m$. În modul al doilea, cele două mase se deplasează egal în direcții opuse. Mijlocul arcului k nu se deplasează, deci este un *punct nodal* (nod de vibrație). Dacă acest punct ar fi fixat, mișcarea în modul respectiv nu s-ar modifica. Arcul dintre mase ar fi împărțit în două arcuri de rigiditate $2k$ fiecare. Masa $2m$ este astfel legată de puncte fixe prin două arcuri de rigidități $2k$ (în paralel) cu o rigiditate echivalentă $4k$, în timp ce masa m este legată de un punct fix prin un arc de rigiditate $2k$, ambele subsisteme având aceeași pulsație proprie egală cu ω_2 .

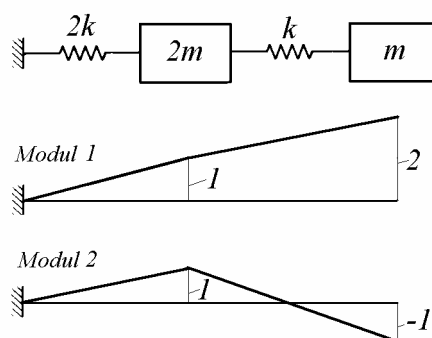


Fig. 3.3

Rezumând, primul mod propriu de vibrație are pulsația proprie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}}$ și o formă modală $\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$, iar al doilea mod propriu are pulsația proprie $\omega_2 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$ și o formă modală $\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$. Dacă masele sistemului sunt deplasate inițial cu $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ apoi lăsate liber, mișcarea sistemului va fi armonică cu pulsația $\omega_1 = 0,707\sqrt{k/m}$. Dacă deplasările inițiale ar fi $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$, mișcarea va fi armonică cu pulsația $\omega_2 = 1,414\sqrt{k/m}$.

3.1.3 Ortogonalitatea modurilor proprii

Înlocuind soluțiile (3.13) în ecuația (3.3), se obține

$$[k]\{u\}_1 = \omega_1^2 [m]\{u\}_1, \quad (3.15, a)$$

$$[k]\{u\}_2 = \omega_2^2 [m]\{u\}_2. \quad (3.15, b)$$

Înmulțind în (3.15, a) la stânga cu $\{u\}_2^T$ rezultă

$$\{u\}_2^T [k] \{u\}_1 = \omega_1^2 \{u\}_2^T [m] \{u\}_1. \quad (3.16)$$

Dacă se transpune (3.15, b) și se înmulțește la dreapta cu $\{u\}_1$ rezultă

$$\{u\}_2^T [k] \{u\}_1 = \omega_2^2 \{u\}_2^T [m] \{u\}_1. \quad (3.17)$$

Scăzând (3.16) din (3.17), pentru $\omega_1 \neq \omega_2$, se obține

$$\{u\}_2^T [m] \{u\}_1 = 0, \quad (3.18)$$

și calculând transpusa

$$\{u\}_1^T [m] \{u\}_2 = 0. \quad (3.19)$$

Înlocuind (3.18) în (3.16) se obține

$$\{u\}_2^T [k] \{u\}_1 = 0 \quad (3.20)$$

și calculând transpusa

$$\{u\}_1^T [k] \{u\}_2 = 0. \quad (3.21)$$

Relațiile (3.18)-(3.21) arată că vectorii modali sunt ortogonali în raport cu matricele de masă și de rigiditate. De notat diferența față de ortogonalitatea obișnuită a doi vectori $\{a\}$ și $\{b\}$, care se scrie sub forma $\{a\}^T \{b\} = 0$. Se spune că vectorii modali sunt *ortonormali* (ortogonali și normalizați).

3.1.4 Coordonate modale

Dacă în expresiile (3.13) se notează

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \\ q_2(t) &= C_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2), \end{aligned} \quad (3.22)$$

soluția (3.14) devine

$$\{x(t)\} = \{u\}_1 q_1 + \{u\}_2 q_2. \quad (3.23)$$

Relația (3.23) se poate scrie sub forma

$$\{x(t)\} = \begin{bmatrix} \{u\}_1 & \{u\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [u] \{q\} \quad (3.23, a)$$

unde

$$[u] = [\{u\}_1 \{u\}_2] \quad (3.24)$$

se numește *matricea modală*. Coloanele matricii modale sunt vectorii modali.

Înlocuind (3.23) în (3.3), înmulțind la stânga cu $\{u\}_r^T$ ($r=1,2$) și ținând cont de relațiile de ortogonalitate, se obține

$$M_r \ddot{q}_r + K_r q_r = 0, \quad (3.25)$$

unde

$$M_r = \{u\}_r^T [m] \{u\}_r, \quad K_r = \{u\}_r^T [k] \{u\}_r \quad (3.26)$$

sunt *masa modală*, respectiv *rigiditatea modală* a modului r .

Valorile maselor și rigidităților modale depind de normalizarea vectorilor modali. Când normalizarea se face impunând valori egale cu 1 maselor modale, rigiditățile modale sunt egale cu pătratele pulsațiilor proprii respective.

Din relațiile (3.15) se obține pulsația proprie în funcție de vectorul modal

$$\omega_r^2 = \frac{\{u\}_r^T [k] \{u\}_r}{\{u\}_r^T [m] \{u\}_r}, \quad r=1,2 \quad (3.27)$$

Câțul lui Rayleigh este definit prin raportul

$$R(\{u\}) = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}}. \quad (3.28)$$

Dacă vectorul $\{u\}$ coincide cu unul din vectorii modali ai sistemului, atunci câțul se reduce la pătratul pulsației proprii respective. Câțul lui Rayleigh are o valoare staționară în vecinătatea unui vector modal. Astfel, dacă $\{u\}$ este un vector ales arbitrar, care diferă puțin de primul vector modal, atunci $R(\{u\})$ are o valoare foarte apropiată de pătratul primei pulsații proprii și totdeauna mai mare.

Transformarea liniară de coordonate (3.23) decuplează ecuațiile de mișcare. Coordonatele (3.22), în care ecuațiile de mișcare sunt independente, se numesc *coordonate principale* sau *coordonate modale*.

Înlocuind (3.23, a) în (3.3) și înmulțind la stânga cu $[u]^T$ se obține

$$[u]^T [m] [u] \{\ddot{q}\} + [u]^T [k] [u] \{q\} = \{0\}, \quad (3.29)$$

sau

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\}, \quad (3.29, a)$$

unde matricile diagonale

$$[M] = [u]^T [m] [u] \quad \text{și} \quad [K] = [u]^T [k] [u] \quad (3.30)$$

sunt *matricea de masă modală*, respectiv *matricea de rigiditate modală*.

Transformarea de coordonate (3.23, a) diagonalizează simultan matricile de masă și de rigiditate. După rezolvarea separată a ecuațiilor decuplate (3.29, a), coordonatele modale pot fi înlocuite în (3.23, a) pentru a obține coordonatele fizice din spațiul configurațiilor. Această metodă se numește *analiză modală*. Analiza modală folosește o transformare de coordonate liniară bazată pe matricea modală pentru a decupla ecuațiile de mișcare ale unui sistem în vibrație.

3.1.5 Răspunsul la excitație armonică

Se consideră vibrațiile forțate ale sistemului din fig. 3.4, sub acțiunea forțelor $f_1(t)$ și $f_2(t)$ aplicate masei m_1 , respectiv m_2 .

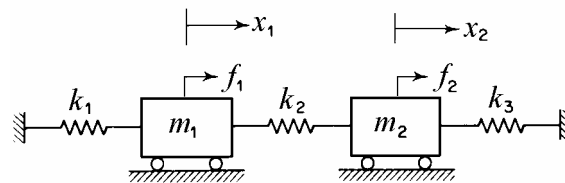


Fig. 3.4

Ecuțiile de mișcare sunt

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= f_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_3 + k_2)x_2 &= f_2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

sau, în formă matricială compactă,

$$[m] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{f\}, \quad (3.31, a)$$

unde $\{f\}$ este *vectorul coloană al forțelor exterioare*.

3.1.5.1 Rezolvarea prin analiză modală

Înlocuind (3.23, a) în ecuația (3.31, a), și înmulțind la stânga cu $[u]^T$ se obține

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\}, \quad (3.32)$$

unde

$$\{F\} = [u]^T \{f\} \quad (3.33)$$

este *vectorul coloană al forțelor modale*.

În cazul excitației armonice

$$\{f\} = \{\hat{f}\} \cos \omega t, \quad (3.34)$$

răspunsul staționar este

$$\{x\} = \{\hat{x}\} \cos \omega t, \quad \{q\} = \{\hat{q}\} \cos \omega t, \quad (3.35)$$

unde o “căciulă” deasupra literei denotă amplitudinea.

Înlocuind (3.34) și (3.35) în (3.32) rezultă

$$[-\omega^2 [M] + [K]] \{\hat{q}\} = [u]^T \{\hat{f}\} = \{\hat{F}\}, \quad (3.36)$$

astfel că amplitudinile coordonatelor modale au expresiile

$$\hat{q}_1 = \frac{\hat{F}_1}{K_1 - \omega^2 M_1} = \frac{\{u\}_1^T \{\hat{f}\}}{\{u\}_1^T [k] \{u\}_1 - \omega^2 \{u\}_1^T [m] \{u\}_1}, \quad (3.37)$$

$$\hat{q}_2 = \frac{\hat{F}_2}{K_2 - \omega^2 M_2} = \frac{\{u\}_2^T \{\hat{f}\}}{\{u\}_2^T [k] \{u\}_2 - \omega^2 \{u\}_2^T [m] \{u\}_2}. \quad (3.38)$$

Ecuția (3.23) scrisă pentru amplitudini devine

$$\{\hat{x}\} = \{u\}_1 \hat{q}_1 + \{u\}_2 \hat{q}_2. \quad (3.39)$$

Înlocuind (3.37) și (3.38) în (3.39) se obține vectorul amplitudinilor în coordonate fizice

$$\{\hat{x}\} = \frac{\{u\}_1^T \{\hat{f}\} \{u\}_1}{\{u\}_1^T [k] \{u\}_1 - \omega^2 \{u\}_1^T [m] \{u\}_1} + \frac{\{u\}_2^T \{\hat{f}\} \{u\}_2}{\{u\}_2^T [k] \{u\}_2 - \omega^2 \{u\}_2^T [m] \{u\}_2}. \quad (3.40)$$

Elementele vectorului $\{\hat{x}\}$ au forma

$$\hat{x}_1 = \frac{\{u\}_1^T \{\hat{f}\}}{K_1 - \omega^2 M_1} u_{11} + \frac{\{u\}_2^T \{\hat{f}\}}{K_2 - \omega^2 M_2} u_{12}, \quad (3.41)$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\{u\}_1^T \{\hat{f}\}}{K_1 - \omega^2 M_1} u_{21} + \frac{\{u\}_2^T \{\hat{f}\}}{K_2 - \omega^2 M_2} u_{22}. \quad (3.42)$$

Exemplul 3.2

Se consideră sistemul din fig. 3.2 acționat de forțele armonice $f_1 = \hat{f}_1 \cos \omega t$ și $f_2 = \hat{f}_2 \cos \omega t$. Să se calculeze amplitudinile răspunsului staționar și să se traseze curbele receptanțelor pentru $f_2 = 0$.

Rezolvare. Ecuțiile de mișcare se pot scrie

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}.$$

Folosind transformarea de coordonate

$$\{x\} = [u] \{q\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} q_1 + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

și înmulțind la stânga cu transpusa matricii modale, se obține

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

sau

$$\begin{bmatrix} 6m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 + 2f_2 \\ f_1 - f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}.$$

În cazul excitației armonice $\{f\} = \{\hat{f}\} \cos \omega t$, răspunsul staționar este $\{q\} = \{\hat{q}\} \cos \omega t$. Amplitudinile coordonatelor modale sunt

$$\hat{q}_1 = \frac{\hat{F}_1}{3k - \omega^2 6m} = \frac{\hat{f}_1 + 2\hat{f}_2}{3k(1 - \omega^2/\omega_1^2)}, \quad \hat{q}_2 = \frac{\hat{F}_2}{6k - \omega^2 3m} = \frac{\hat{f}_1 - \hat{f}_2}{6k(1 - \omega^2/\omega_2^2)}.$$

Amplitudinile în spațiul configurațiilor sunt elementele vectorului

$$\{\hat{x}\} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \{\hat{f}\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}}{3k(1 - \omega^2/\omega_1^2)} + \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \{\hat{f}\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}{6k(1 - \omega^2/\omega_2^2)}.$$

Când $f_2 = 0$ și $f_1 = f$, vectorul amplitudinilor se poate scrie

$$\{\hat{x}\} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{f} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}}{3k(1 - \omega^2/\omega_1^2)} + \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{f} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}{6k(1 - \omega^2/\omega_2^2)}$$

iar receptanțele sunt

$$\alpha_{11} = \frac{\hat{x}_1}{\hat{f}} = \frac{1}{3k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)} + \frac{1}{6k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)}, \quad \alpha_{21} = \frac{\hat{x}_2}{\hat{f}} = \frac{2}{3k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)} + \frac{-1}{6k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)},$$

sau

$$\frac{\hat{x}_1}{\hat{f}} = \frac{1}{6m(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{1}{3m(\omega_2^2 - \omega^2)}, \quad \frac{\hat{x}_2}{\hat{f}} = \frac{1}{3m(\omega_1^2 - \omega^2)} - \frac{1}{3m(\omega_2^2 - \omega^2)}.$$

Curbele de răspuns în frecvență sunt redată în fig. 3.5.

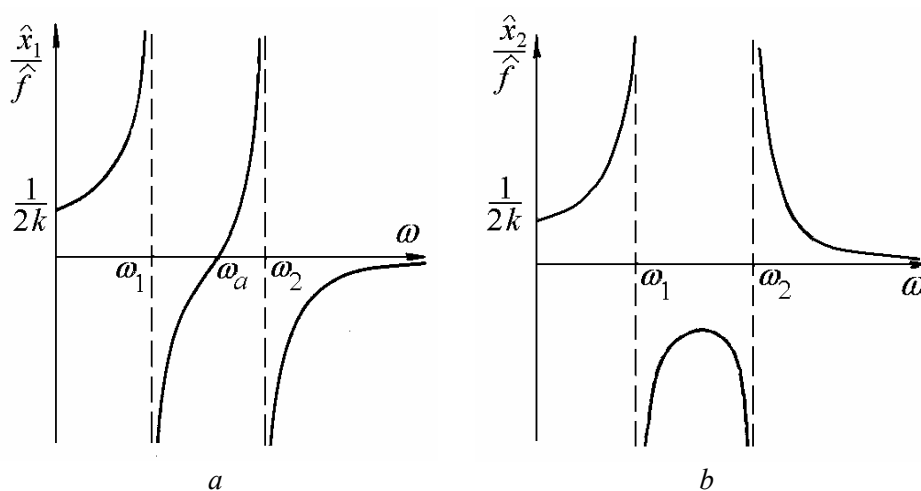


Fig. 3.5

Rezonanțele apar la $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}}$ și $\omega_2 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$, când pulsația excitatoare devine egală cu una din pulsațiile proprii ale sistemului. Când $\omega = \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$, prima masă este fixă în spațiu, $\hat{x}_1 = 0$, în timp ce masa a doua vibrează, $\hat{x}_2 \neq 0$, condiție definită ca *antirezonanță*. Pulsația de antirezonanță este egală cu pulsația proprie a subsistemului format din arcul k și masa m . Acest subsistem este numit *absorbitor dinamic de vibrații*. Energia introdusă într-un ciclu de vibrație de forța aplicată este absorbită de această parte a sistemului, menținând masa $2m$ fixă în spațiu, condiție urmărită în multe aplicații practice.

3.1.5.2 Rezolvarea prin analiză spectrală

Înlocuind (3.34) și (3.35) în ecuația (3.31, a), rezultă

$$\left([k] - \omega^2 [m] \right) \{ \hat{x} \} = \{ \hat{f} \}, \quad (3.43)$$

sau

$$\{ \hat{x} \} = \left([k] - \omega^2 [m] \right)^{-1} \{ \hat{f} \}. \quad (3.44)$$

Ecuția (3.43) reprezintă un sistem liniar de ecuații algebrice care poate fi rezolvat folosind regula lui Cramer. Inversarea din ecuația (3.44) nu se face practic niciodată, preferându-se rezolvarea sistemului (3.43).

Exemplul 3.3

Se consideră sistemul din fig. 3.2 acționat de o forță armonică $f_1 = \hat{f}_1 \cos \omega t$. Se cere să se calculeze amplitudinile răspunsului staționar prin analiză spectrală directă.

Rezolvare. Ecuațiile de mișcare (3.31) se scriu

$$\begin{aligned} 2m \ddot{x}_1 + 3k x_1 - k x_2 &= \hat{f}_1 \cos \omega t, \\ m \ddot{x}_2 - k x_1 + k x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Înlocuind soluția (3.35) în ecuațiile de mai sus, rezultă un sistem de două ecuații algebrice liniare

$$\begin{aligned} (3k - \omega^2 2m) \hat{x}_1 - k \hat{x}_2 &= \hat{f}_1, \\ -k \hat{x}_1 + (k - \omega^2 m) \hat{x}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Folosind regula lui Cramer, se obțin amplitudinile \hat{x}_1 și \hat{x}_2 sub forma

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k \\ 0 & k - \omega^2 m \end{vmatrix} \hat{f}}{\begin{vmatrix} 3k - \omega^2 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix}} = \frac{(k - \omega^2 m) \hat{f}}{(3k - \omega^2 2m)(k - \omega^2 m) - k^2}, \\ \hat{x}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 3k - \omega^2 2m & 1 \\ -k & 0 \end{vmatrix} \hat{f}}{\begin{vmatrix} 3k - \omega^2 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix}} = \frac{k \hat{f}}{(3k - \omega^2 2m)(k - \omega^2 m) - k^2}, \end{aligned}$$

sau, într-o formă apropiată de cea obținută prin analiză modală

$$\hat{x}_1 = \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) \hat{f}}{2m \left(\frac{k}{2m} - \omega^2\right) \left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)}, \quad \hat{x}_2 = \frac{\frac{k}{m} \hat{f}}{2m \left(\frac{k}{2m} - \omega^2\right) \left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)}.$$

La numitor apare determinantul caracteristic, care face ca amplitudinile să crească la infinit atunci când pulsația excitatoare devine egală cu una din pulsațiile proprii. Sistemul are două rezonanțe.

3.2 Vibrații de torsiune

În cele ce urmează se studiază sisteme disc-arbore cu două grade de libertate, în care discurile rigide au vibrații unghiulare față de axa arborelui.

3.2.1 Ecuațiile de mișcare

Se consideră sistemul din fig. 3.6, *a* compus din două discuri cu momente de inerție masice polare J_1 și J_2 , kgm^2 , montate pe arbori cu rigidități torsionale K_1 , K_2 și K_3 , Nm/rad , de masă neglijabilă.

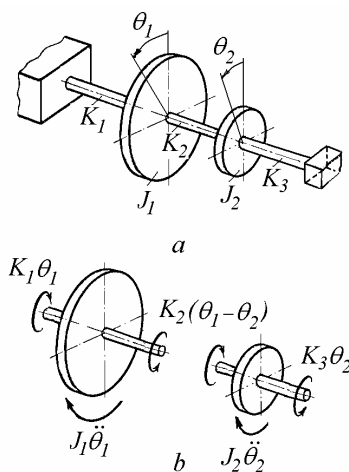


Fig. 3.6

Fie θ_1 și θ_2 unghiurile instantanee ale discurilor față de poziția de echilibru static. Utilizând diagramele de momente din fig. 3.6, *b* și principiul lui d'Alembert (echilibrul dinamic al cuplurilor exterioare și de inerție), ecuațiile de mișcare se scriu sub forma

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + K_1 \theta_1 + K_2 (\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + K_3 \theta_2 - K_2 (\theta_1 - \theta_2) &= 0, \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + (K_1 + K_2) \theta_1 - K_2 \theta_2 &= 0, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - K_2 \theta_1 + (K_3 + K_2) \theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Acesta este un sistem de ecuații diferențiale asemănător sistemului (3.1). Există o analogie completă între sistemele în vibrații de translație și cele în vibrații torsionale, echivalentul arcurilor, maselor și forțelor fiind respectiv arcurile de torsiune, discurile (care au momente de inerție masice) și cuplurile. Toate rezultatele stabilite în §3.1 se pot aplica sistemelor torsionale. În continuare se studiază doar sisteme care pot avea mișcări generale de corp rigid, fără constrângeri.

3.2.2 Sistemul disc-arbore-disc

Arborele dintre o pompă (sau un ventilator) și motorul electric de acționare se poate roti în lagăre ca un corp rigid. Există numeroase sisteme ingineresti care pot fi modelate printr-un sistem torsional cu două discuri, fără constrângeri la rotație (fig. 3.7). Cele două discuri, care modelează rotoarele motorului și mașinii antrenate, sunt legate printr-un arc torsional care modelează arborii (conducător și condus ai) celor două mașini și cuplajul dintre aceștia.

Momentele de inerție masice polare ale discurilor se notează J_1 și J_2 , iar rigiditatea torsională a arborelui de masă neglijabilă se notează $K = GI_p/\ell$.

Ecuțiile de mișcare

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + K \theta_1 - K \theta_2 &= 0, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - K \theta_1 + K \theta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

pot fi scrise matricial

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.46, a)$$

sau, în formă compactă,

$$[J] \{ \ddot{\theta} \} + [K] \{ \theta \} = \{ 0 \}.$$

Matricea de rigiditate $[K]$ este pozitiv semidefinită. Deoarece sistemul nu este legat de un reper fix, matricea de rigiditate este singulară. Sistemul se poate roti liber, având o mișcare de corp rigid în care energia potențială este nulă.

Aparent, sistemul are două grade de libertate. Totuși, adunând ecuațiile (3.46), se obține

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 = 0, \quad (3.47)$$

astfel că cele două coordonate θ_1 și θ_2 nu sunt independente. Integrând, se poate obține o relație de legătură între ele, care poate fi utilizată pentru a elimina una din coordonate din formularea problemei.

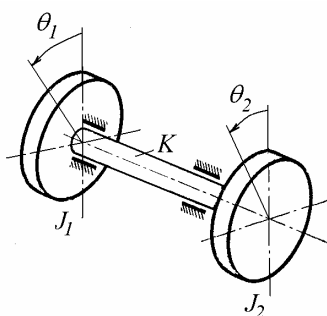


Fig. 3.7

Împărțind prima ecuație (3.46) cu J_1 , a doua ecuație cu J_2 și scăzând ecuațiile rezultate, se obține

$$\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{K}{J_1} + \frac{K}{J_2} \right) (\theta_1 - \theta_2) = 0. \quad (3.48)$$

Notând unghiul de răsucire $\theta_1 - \theta_2 = \theta$, ecuația (3.48) devine

$$\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \ddot{\theta} + K \theta = 0, \quad (3.48, a)$$

care are forma ecuației de mișcare a unui sistem cu un grad de libertate.

3.2.2.1 Modurile proprii de vibrație

Înlocuind în (3.46) soluții de forma

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= a_1 \cos(\omega t - \varphi), \\ \theta_2(t) &= a_2 \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (3.49)$$

se obține sistemul de ecuații algebrice liniare

$$\begin{aligned} (K - J_1 \omega^2) a_1 - K a_2 &= 0, \\ -K a_1 + (K - J_2 \omega^2) a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Împărțind prin K și notând

$$\omega^2 J_1 / K = \alpha \quad (3.51)$$

ecuațiile (3.50) devin

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) a_1 - a_2 &= 0, \\ -a_1 + \left(1 - \frac{J_2}{J_1} \alpha\right) a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ecuțiile omogene simultane (3.52) admit soluții nebanale dacă determinantul coeficienților variabilelor a_1 și a_2 este zero

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha & -1 \\ -1 & 1 - \frac{J_2}{J_1} \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (3.53)$$

sau

$$\frac{J_2}{J_1} \alpha^2 - \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) \alpha = 0. \quad (3.53, a)$$

Soluțiile ecuației (3.53, a) sunt

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1 + J_1 / J_2. \quad (3.54)$$

Prima pulsație proprie este dată de $\omega_1^2 = 0$ iar a doua de

$$\omega_2^2 = \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right) K. \quad (3.55)$$

Rădăcina $\omega_1^2 = 0$ arată că sunt posibile deplasări de corp rigid. Acestea pot fi produse de o deplasare unghiulară statică sau de rotirea cu viteză unghiulară constantă. Ele nu sunt vibrații propriu-zise. Soluțiile ecuațiilor (3.46) sunt de forma

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= C_1 + C_2 t + C_3 \sin \omega_2 t + C_4 \cos \omega_2 t, \\ \theta_2(t) &= C_1 + C_2 t + \left(1 - J_1 \omega_2^2 / K\right) (C_3 \sin \omega_2 t + C_4 \cos \omega_2 t), \end{aligned}$$

unde C_1, \dots, C_4 sunt constante de integrare.

Formele modale sunt determinate de raportul $\mu = a_2 / a_1 = 1 - \alpha$.

Pentru primul mod

$$\mu_1 = (a_2/a_1)_1 = 1 - \alpha_1 = 1, \quad (3.56, a)$$

ambele discuri au aceeași deplasare unghiulară, ceea ce definește o rotație de corp rigid în care arborele nu este răsucit.

Pentru modul al doilea

$$\mu_2 = (a_2/a_1)_2 = 1 - \alpha_2 = -J_1/J_2, \quad (3.56, b)$$

discurile vibrează în opoziție. Arborele are un punct nodal dispus mai aproape de discul cu moment de inerție mai mare.

Formele modurilor proprii de vibrație sunt prezentate în fig. 3.8.

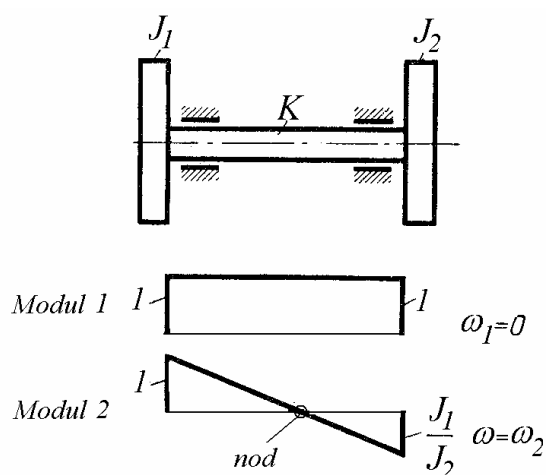


Fig. 3.8

3.2.2.2 Răspunsul la excitație armonică

Se consideră sistemul din fig. 3.6, acționat de un cuplu armonic $M(t) = M_0 \cos \omega t$ (ne figurat) aplicat discului al doilea. Ecuațiile de mișcare sunt

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + K \theta_1 - K \theta_2 &= 0, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - K \theta_1 + K \theta_2 &= M_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Vibrațiile staționare ale acestui sistem sunt de forma

$$\theta_1(t) = \Theta_1 \cos \omega t, \quad \theta_2(t) = \Theta_2 \cos \omega t. \quad (3.58)$$

Rezultă ecuațiile algebrice

$$\begin{aligned} (K - J_1 \omega^2) \Theta_1 - K \Theta_2 &= 0, \\ -K \Theta_1 + (K - J_2 \omega^2) \Theta_2 &= M_0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

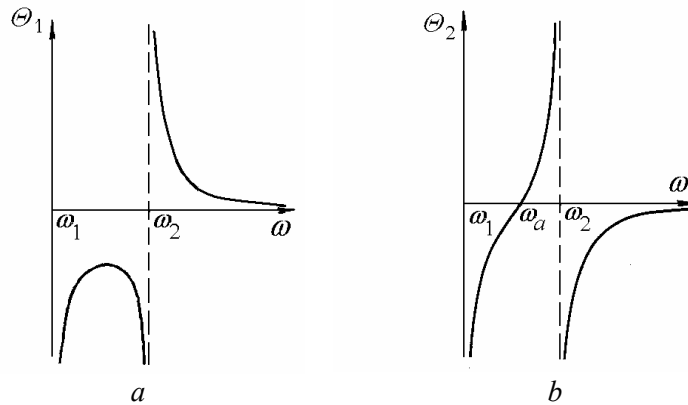


Fig. 3.9

Împărțind prin K și notând $\omega^2 J_1 / K = \alpha$, se obține

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \Theta_1 - \Theta_2 &= 0, \\ -\Theta_1 + \left(1 - \frac{J_2}{J_1} \alpha\right) \Theta_2 &= \frac{M_0}{K}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Rezolvând pentru Θ_1 și Θ_2 , utilizând regula lui Cramer, rezultă

$$\Theta_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 - \frac{J_2}{J_1} \alpha \end{vmatrix} \frac{M_0}{K}}{\begin{vmatrix} 1 - \alpha & -1 \\ -1 & 1 - \frac{J_2}{J_1} \alpha \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{J_2}{J_1} \left(\alpha - \frac{J_1 + J_2}{J_2}\right) \alpha} \frac{M_0}{K}, \quad (3.61)$$

$$\Theta_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \frac{M_0}{K}}{\begin{vmatrix} 1 - \alpha & -1 \\ -1 & 1 - \frac{J_2}{J_1} \alpha \end{vmatrix}} = \frac{1 - \alpha}{\frac{J_2}{J_1} \left(\alpha - \frac{J_1 + J_2}{J_2}\right) \alpha} \frac{M_0}{K}. \quad (3.62)$$

Amplitudinile Θ_1 și Θ_2 sunt reprezentate grafic în fig. 3.9 în funcție de pulsația excitatoare. Ambele amplitudini unghiulare devin infinite când numitorul expresiilor (3.61)-(3.62) este zero, deci când pulsația cuplului exterior devine egală cu una din pulsațiile proprii. Există un fel de “rezonanță la pulsație nulă” corespunzătoare modului de corp rigid și o rezonanță adevărată la

$$\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)K}.$$

Amplitudinea discului al doilea este zero când $\alpha = 1$. Această antirezonanță apare la $\omega = \sqrt{K/J_1}$, pulsația proprie a subsistemului format din arbore și primul disc, care acționează ca un absorbitor dinamic și menține discul al doilea fix în spațiu.

3.2.2.3 Tensiuni dinamice

Amplitudinea unghiului de răsucire al arborelui este

$$\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = \frac{1}{\frac{J_2}{J_1} \left(\frac{J_1 + J_2}{J_2} - \alpha \right)} \frac{M_0}{K}. \quad (3.63)$$

Notând momentul de răsucire în arbore prin $M_t = M_{t_0} \cos \omega t$, amplitudinea sa este

$$M_{t_0} = K \Delta\Theta = \frac{M_0}{\frac{J_2}{J_1} \left(\frac{J_1 + J_2}{J_2} - \alpha \right)}. \quad (3.64)$$

Tensiunile tangențiale de răsucire sunt de forma $\tau = \tau_0 \cos \omega t$, iar amplitudinea lor este

$$\tau_0 = M_{t_0} / W_p, \quad (3.65)$$

unde W_p este modulul de rezistență polar al secțiunii transversale a arborelui.

Dacă arborele transmite o putere N , la viteza unghiulară constantă ω_N , atunci tensiunile de forfecare “statice” sunt

$$\tau_N = M_{t_{st}} / W_p = N / (\omega_N W_p). \quad (3.66)$$

Utilizând valorile lui τ_0 și τ_N se poate face un calcul al coeficientului de siguranță la oboseală, considerând o variație în timp a tensiunilor ca în fig. 3.10.

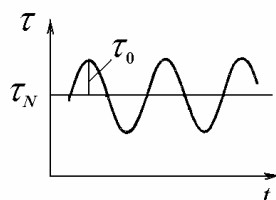


Fig. 3.10

Exemplul 3.4

Sistemul torsional din fig. 3.6 este acționat de un cuplu armonic de amplitudine $M_0 = 10^4 \text{ Nm}$ și pulsație $\omega = 314 \text{ rad/s}$ (ne figurat). Ambele discuri au același moment de inerție masiv polar $J = 57 \text{ kgm}^2$. Arborele are lungimea $\ell = 0,4 \text{ m}$, diametrul $d = 0,14 \text{ m}$ și modulul de elasticitate transversal $G = 81 \text{ GPa}$. Se cere amplitudinea tensiunilor tangențiale dinamice din arbore.

Rezolvare. Secțiunea transversală a arborelui are caracteristicile $I_p = \pi d^4 / 32 = 0,377 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$ și $W_p = \pi d^3 / 16 = 0,538 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$. Rigiditatea torsională este $K = GI_p / \ell = 7,63 \cdot 10^9 \text{ N mm/rad}$. Raportul adimensional $\alpha = J \omega^2 / K = 0,735$. Unghiul de răsucire $\Delta\theta = M_0 / K(2 - \alpha) = 0,001036 \text{ rad}$. Amplitudinea momentului de răsucire dinamic este $M_{t_0} = M_0 / (2 - \alpha) = 7910 \text{ Nm}$. Amplitudinea tensiunilor tangențiale dinamice este $\tau_0 = M_{t_0} / W_p = 14,7 \text{ N/mm}^2$.

3.2.3 Sisteme cu roți dințate

Sistemul torsional din fig. 3.11, *a* are un angrenaj cu roți dințate. Pinionul de pe arborele 1 are raza (cercului primitiv) r_1 iar roata de pe arborele 2 are raza r_2 . Se presupune că roțile dințate sunt rigide, de inerție neglijabilă și în contact permanent. Raportul de transmisie este

$$i = \frac{r_1}{r_2} = -\frac{n_2}{n_1} = -\frac{\theta_2}{\theta_1}, \quad (3.67)$$

unde n_1 și n_2 sunt turațiile celor doi arbori, θ_1 și θ_2 sunt deplasările unghiulare corespunzătoare.

Sistemul torsional cu roți dințate este redus la un sistem echivalent fără roți dințate (fig. 3.11, *b*). În procesul de reducere, rigiditatea arborelui echivalent se determină din condiția egalității energiilor potențiale

$$(K\theta^2)_{real} = (K\theta^2)_{ech},$$

de unde rezultă

$$K_{ech} = \left(\frac{\theta_{real}}{\theta_{ech}}\right)^2 K_{real} = \left(\frac{n_{real}}{n_{ech}}\right)^2 K_{real} = i^2 K_{real}. \quad (3.68)$$

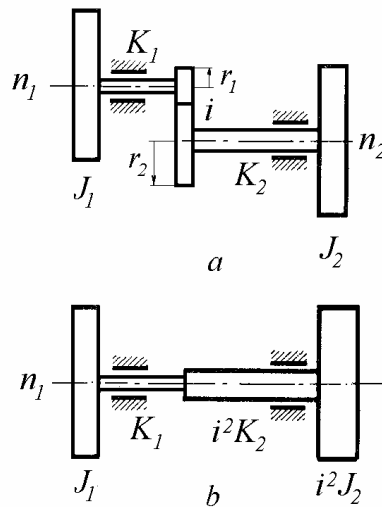


Fig. 3.11

Momentul de inerție masic polar al discului echivalent se determină din condiția egalității energiilor cinetice

$$(J\dot{\theta}^2)_{real} = (J\dot{\theta}^2)_{ech},$$

de unde rezultă

$$J_{ech} = \left(\frac{\dot{\theta}_{real}}{\dot{\theta}_{ech}}\right)^2 J_{real} = \left(\frac{n_{real}}{n_{ech}}\right)^2 J_{real} = i^2 J_{real}. \quad (3.69)$$

Alegând arborele 1 ca referință, parametrii echivalenți ai arborelui 2 sunt (fig. 3.11, b)

$$K_{2ech} = i^2 K_2, \quad J_{2ech} = i^2 J_2. \quad (3.70)$$

Când roțile dințate au inerție neglijabilă, se aplică următoarele reguli pentru construcția sistemelor echivalente: Se înlătură toate roțile dințate și se înmulțesc toate rigiditățile și momentele de inerție cu i^2 , unde i este raportul între turația arborelui redus și turația arborelui de referință.

După determinarea formei modurilor de vibrație ale sistemului echivalent, formele modale și momentele de răsucire ale sistemului real se obțin utilizând relațiile de compatibilitate

$$\theta_{real}/\theta_{ech} = -i, \quad M_{ech}/M_{real} = -i. \quad (3.71)$$

3.2.4 Sisteme ramificate cu roți dințate

Sistemul ramificat din fig. 3.12, *a* are roți dințate și arbori cu inerție neglijabilă. El poate fi înlocuit prin modelul echivalent din fig. 3.12, *b* în care raportul de transmisie este -1 , înmulțind rigiditatea și momentul de inerție din ramura 2-3 cu pătratul raportului de transmisie. Momentele de răsucire și deplasările unghiulare în ramura redusă echivalentă diferă de valorile reale, conform relațiilor (3.71).

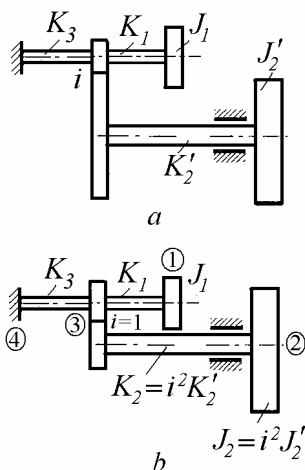


Fig. 3.12

Ecuțiile de mișcare se pot scrie folosind metoda elementelor finite. Un arbore de secțiune constantă este considerat un element finit cu rigiditate la torsiune K . Punctele de legătură ale arborelui cu alte componente ale sistemului vibrator se numesc *noduri* (nu trebuie confundate cu punctele fixe ale formelor modale), fiind numerotate 1 și 2 în fig. 3.13.

Cuplurile M_1 și M_2 pot fi exprimate în funcție de rotirile θ_1 și θ_2 utilizând ecuațiile de echilibru și relațiile cuplu/rotație

$$\begin{aligned} M_1 = -M_2 = K \theta_1 & \text{ pentru } \theta_2 = 0, \\ M_1 = -M_2 = -K \theta_2 & \text{ pentru } \theta_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ecuțiile (3.72) se pot scrie matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

sau condensat $\{M\} = [k^e] \{\theta\}$, unde $[k^e]$ este matricea de rigiditate a elementului.

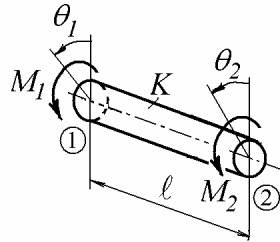


Fig. 3.13

Utilizând ecuația (3.73), relația cuplu-rotatie pentru fiecare arbore din fig. 3.12, b se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_3 & -K_3 \\ -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}.$$

Cele trei relații de mai sus se pot expanda după cum urmează

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}.$$

Cuplurile din sistem se obțin însumând cuplurile care acționează în fiecare nod. Adunând matricile de rigiditate expandate se obține

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_1 & -K_2 & K_1 + K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.74)$$

Utilizând condiția la limită $\theta_4 = 0$, se obține matricea de rigiditate redusă a sistemului. Rezultă ecuațiile de mișcare

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 \\ 0 & K_2 & -K_2 \\ -K_1 & -K_2 & K_1 + K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.75)$$

Eliminând coordonata θ_3 folosind a treia ecuație

$$-K_1 \theta_1 - K_2 \theta_2 + (K_1 + K_2 + K_3) \theta_3 = 0$$

se obțin două ecuații de forma

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{K_1(K_2 + K_3)}{K_1 + K_2 + K_3} \theta_1 - \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2 + K_3} \theta_2 &= 0, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2 + K_3} \theta_1 + \frac{K_2(K_1 + K_3)}{K_1 + K_2 + K_3} \theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

După rezolvarea problemei de valori proprii, pentru a determina formele modale reale, amplitudinile unghiulare θ_2 , determinate pentru sistemul echivalent, trebuie transformate în amplitudini reale folosind relațiile (3.71). Un procedeu mai direct de rezolvare este prezentat în § 4.1.3.

3.3 Vibrații de încovoiere

În acest paragraf se studiază bare și cadre plane cu masa proprie neglijabilă pe care sunt montate mase rigide. La aceste sisteme este convenabilă utilizarea flexibilităților în locul rigidităților, primele fiind cantități măsurabile experimental.

3.3.1 Flexibilități (coeficienți de influență)

Bara în consolă din fig. 3.14, a este solicitată de forțele f_1 și f_2 aplicate în punctele 1, respectiv 2. Deplasările transversale (săgețile) pe direcțiile forțelor f_1 și f_2 sunt y_1 , respectiv y_2 .

Asupra unei bare cu aceeași rezemare (fig. 3.14, *b*) se aplică o forță de mărime egală cu unitatea, în punctul 1 pe direcția forței f_1 . Deplasările în 1 și 2, pe direcțiile y_1 și y_2 , se notează δ_{11} , respectiv δ_{21} . O forță egală cu 1 aplicată în punctul 2 pe direcția forței f_2 produce deplasările δ_{12} și δ_{22} (fig. 3.14, *c*).

Relațiile între forțele f_1 , f_2 și deplasările totale y_1 , y_2 se pot scrie, aplicând principiul suprapunerii efectelor, sub forma

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} f_1 + \delta_{12} f_2, \\ y_2 &= \delta_{21} f_1 + \delta_{22} f_2. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Coefficienții δ_{ij} se numesc *flexibilități (coeficienți de influență)*.

Prin definiție, δ_{ij} este deplasarea (în punctul și pe direcția) coordonatei i datorită unei forțe de amplitudine egală cu 1 aplicată (în punctul și pe direcția) coordonatei j .

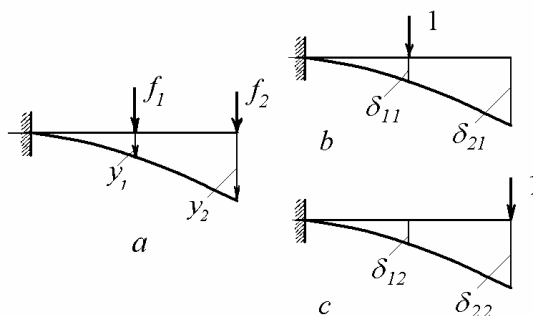


Fig. 3.14

În notație matricială, relațiile (3.77) devin

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (3.77, a)$$

sau

$$\{y\} = [\delta] \{f\}, \quad (3.78)$$

unde $[\delta]$ este *matricea de flexibilitate* a sistemului.

Matricea de flexibilitate este simetrică $[\delta]^T = [\delta]$, în virtutea teoremei de reciprocitate a lui Maxwell: *Deplasarea într-un punct al unei structuri produsă de o forță unitate aplicată în alt punct este egală cu deplasarea în al doilea punct produsă de o forță unitate aplicată în primul punct* (deplasările – de translație sau rotație, se măsoară în aceeași direcție ca sarcinile – forță sau moment).

Deoarece într-o ecuație de forma $\{f\} = [k]\{y\}$ matricea $[k]$ este o *matrice de rigiditate*, rezultă că $[k] = [\delta]^{-1}$ sau, echivalent, matricea de flexibilitate este inversa matricei de rigiditate

$$[\delta] = [k]^{-1}. \quad (3.79)$$

Când în sistem sunt posibile mișcări de corp rigid, matricea $[k]$ este singulară și $[\delta] = [k]^{-1}$ nu există.

3.3.2 Ecuațiile de mișcare

Pe bara cu greutate neglijabilă din fig. 3.15, *a* și cu modulul de rigiditate la încovoiere $EI = \text{const.}$ sunt montate masele m_1 și m_2 în punctele 1 și 2. Dacă interesează numai deplasările laterale ale celor două mase, mișcarea sistemului este complet determinată de deplasările y_1 și y_2 , deci sistemul are două grade de libertate.

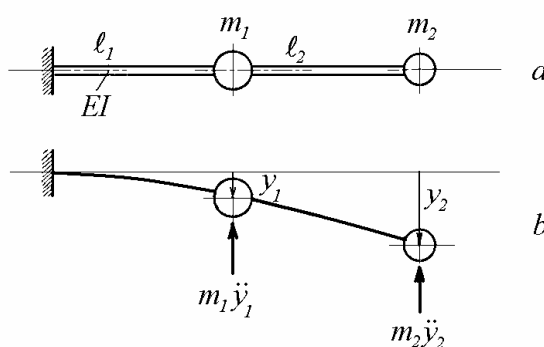


Fig. 3.15

În vibrații libere (fig. 3.15, *b*), aplicând principiul lui d'Alembert, asupra sistemului acționează doar forțele de inerție

$$f_1 = -m_1 \ddot{y}_1, \quad f_2 = -m_2 \ddot{y}_2. \quad (3.80)$$

Înlocuind aceste forțe în relațiile (3.77), se obțin ecuațiile diferențiale ale mișcării

$$\begin{aligned} \delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 + y_1 &= 0, \\ \delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 + y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

În notație matricială

$$[b]\{\ddot{y}\} + \{y\} = \{0\}. \quad (3.82)$$

Matricea $[b]$ poate fi descompusă în produs sub forma

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} m_1 & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 \end{bmatrix} = [\delta][m], \quad (3.83)$$

unde $[m]$ este matricea diagonală a maselor.

În ecuațiile (3.81) cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricii de flexibilitate.

3.3.3 Moduri proprii de vibrație

Înlocuind soluții de forma

$$\{y\} = \{a\} \cos(\omega t - \varphi), \quad (3.84)$$

ecuația (3.81) devine

$$-\omega^2 [b] \{a\} + \{a\} = \{0\}$$

sau

$$[b] \{a\} = \frac{1}{\omega^2} \{a\}. \quad (3.85)$$

Aceasta este o problemă standard de valori proprii, în care $\lambda = 1/\omega^2$ sunt valorile proprii iar $\{a\}$ sunt vectorii proprii. Valorile proprii sunt inversele pătratelor pulsațiilor proprii, iar vectorii proprii sunt vectorii modali care definesc forma modurilor proprii de vibrație.

Ecuațiile (3.85) se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} (b_{11}\omega^2 - 1)a_1 + b_{12}\omega^2 a_2 &= 0, \\ b_{21}\omega^2 a_1 + (b_{22}\omega^2 - 1)a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.85, a)$$

Condiția de a avea soluții nebanale conduce la ecuația pulsațiilor proprii

$$(b_{11}\omega^2 - 1)(b_{22}\omega^2 - 1) - b_{12}b_{21}\omega^4 = 0,$$

sau

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\omega^4 - (b_{11} + b_{22})\omega^2 + 1 = 0. \quad (3.86)$$

Ecuația (3.86) are două rădăcini reale pozitive ω_1^2 și ω_2^2 , pătratele pulsațiilor proprii.

Forma modurilor proprii este definită de raportul $\mu = a_2/a_1$, numit *coeficient de distribuție*, care devine

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}_1 = \frac{1 - b_{11}\omega_1^2}{b_{12}\omega_1^2}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}_2 = \frac{1 - b_{11}\omega_2^2}{b_{12}\omega_2^2}. \quad (3.87)$$

Exemplul 3.5

Se cer modurile proprii de vibrație ale barei din fig. 3.15, a unde $\ell_1 = \ell_2 = \ell/2$, $m_1 = m_2 = m$ și $EI = const.$

Rezolvare. Coeficienții de flexibilitate au următoarele expresii

$$\delta_{11} = \ell^3/24EI, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 5\ell^3/48EI, \quad \delta_{22} = \ell^3/3EI.$$

Matricea de flexibilitate este

$$[\delta] = \frac{\ell^3}{48EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ecuția (3.85) se poate scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

în care

$$\lambda = 48EI/m\ell^3\omega^2.$$

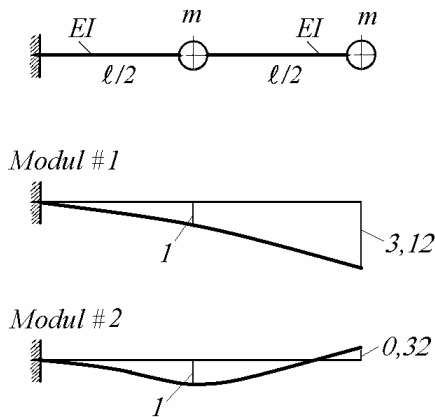


Fig. 3.16

Ecuția pulsațiilor proprii este

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ 5 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \lambda^2 - 18\lambda + 7 = 0,$$

având rădăcinile

$$\lambda_1 = 17,602 \quad \text{și} \quad \lambda_2 = 0,3976 .$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 1,6503 \sqrt{EI/m\ell^3} , \quad \omega_2 = 10,986 \sqrt{EI/m\ell^3} .$$

Formele modale sunt definite de raportul $\mu = a_2/a_1 = \lambda - 2/5$ care are valorile

$$\mu_1 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_1 = \frac{\lambda_1 - 2}{5} = 3,12 , \quad \mu_2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_2 = \frac{\lambda_2 - 2}{5} = -0,32 .$$

Forma modurilor proprii de vibrație este reprezentată grafic în fig. 3.16.

3.3.4 Vibrațiile libere

Se notează cu

$$[u] = [\{ u \}_1 \quad \{ u \}_2] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

matricea vectorilor modali normalizați, denumită *matricea modală*.

Deplasările reale, notate în continuare prin $\{ x \}$ în loc de $\{ y \}$, pot fi exprimate în funcție de coordonatele modale ca în relația (3.23)

$$\{ x \} = [u] \{ q \} = \{ u \}_1 q_1 + \{ u \}_2 q_2 = \sum_{i=1}^2 C_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \{ u \}_i . \quad (3.89)$$

Constantele C_i și φ_i se determină din condițiile inițiale ale mișcării

$$\{ x(0) \} = \sum_{i=1}^2 C_i \cos \varphi_i \{ u \}_i , \quad (3.90)$$

$$\{ \dot{x}(0) \} = \sum_{i=1}^2 \omega_i C_i \sin \varphi_i \{ u \}_i . \quad (3.91)$$

Înmulțind la stânga relațiile (3.90) și (3.91) cu $\{ u \}_j^T [m]$, utilizând relațiile de ortogonalitate (3.18) - (3.19) și definițiile (3.25) și (3.28) ale maselor modale

$$\{ u \}_j^T [m] \{ u \}_i = 0 , \quad i \neq j \quad M_i = \{ u \}_i^T [m] \{ u \}_i , \quad i = 1, 2 \quad (3.92)$$

rezultă

$$\{u\}_j^T [m] \{x(0)\} = C_j M_j \cos \varphi_j, \quad j = 1, 2 \quad (3.93)$$

$$\{u\}_j^T [m] \{\dot{x}(0)\} = \omega_j C_j M_j \sin \varphi_j, \quad j = 1, 2 \quad (3.94)$$

Combinând ecuațiile (3.93) și (3.94), și schimbând indicele se obține

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{\{u\}_i^T [m] \{\dot{x}(0)\}}{\omega_i \{u\}_i^T [m] \{x(0)\}}, \quad i = 1, 2 \quad (3.95)$$

și

$$C_i = \frac{\{u\}_i^T [m] \{x(0)\}}{M_i \cos \varphi_i} = \frac{\{u\}_i^T [m] \{\dot{x}(0)\}}{\omega_i M_i \sin \varphi_i}. \quad i = 1, 2 \quad (3.96)$$

Exemplul 3.6

La sistemul din fig. 3.17 se cere: a) să se determine modurile proprii de vibrație; b) să se stabilească ecuațiile vibrațiilor libere când masa are o viteză inițială verticală v și să se calculeze ecuația traiectoriei masei.

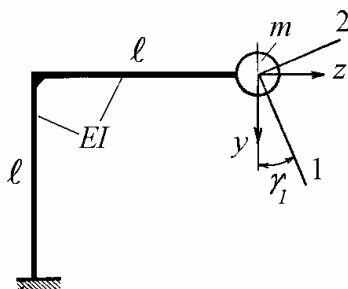


Fig. 3.17

Rezolvare. a) Fie y și z componentele verticală și orizontală ale deplasării instantanee a masei m .

Coefficienții de flexibilitate sunt

$$\delta_{yy} = 4\ell^3/3EI, \quad \delta_{yz} = \delta_{zy} = \ell^3/2EI, \quad \delta_{zz} = \ell^3/3EI.$$

Ecuațiile de mișcare au forma

$$\frac{4\ell^3}{3EI}m\ddot{y} + \frac{\ell^3}{2EI}m\ddot{z} + y = 0,$$

$$\frac{\ell^3}{2EI}m\ddot{y} + \frac{\ell^3}{3EI}m\ddot{z} + z = 0.$$

Căutând soluții de forma

$$y(t) = u_1 \cos(\omega t - \varphi), \quad z(t) = u_2 \cos(\omega t - \varphi),$$

se obține sistemul algebric

$$(8 - \beta)u_1 + 3u_2 = 0,$$

$$3u_1 + (2 - \beta)u_2 = 0,$$

unde s-a notat

$$\beta = 6EI/m\ell^3\omega^2.$$

Ecuția pulsațiilor proprii este

$$\begin{vmatrix} 8 - \beta & 3 \\ 3 & 2 - \beta \end{vmatrix} = 0, \quad \beta^2 - 10\beta + 7 = 0,$$

având rădăcinile

$$\beta_1 = 9,2426, \quad \beta_2 = 0,7574.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 0,8057 \sqrt{EI/m\ell^3}, \quad \omega_2 = 2,8146 \sqrt{EI/m\ell^3}.$$

Forma modurilor proprii este definită de coeficienții de distribuție

$$\mu_1 = \left(\frac{u_2}{u_1} \right)_1 = \frac{u_{21}}{u_{11}} = \frac{\beta_1 - 8}{3} = 0,4142, \quad \mu_2 = \left(\frac{u_2}{u_1} \right)_2 = \frac{u_{22}}{u_{12}} = \frac{\beta_2 - 8}{3} = -2,4142.$$

Vectorii modali, normalizați cu primul element egal cu unitatea, sunt

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,4142 \end{Bmatrix}, \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,4142 \end{Bmatrix}.$$

Se pot stabili următoarele relații

$$\frac{u_{21}}{u_{11}} = \operatorname{tg} \gamma_1 = 0,4142, \quad \gamma_1 = 22,5^\circ,$$

$$\frac{u_{22}}{u_{12}} = \operatorname{tg} \gamma_2 = -2,4142, \quad \gamma_2 = 112,5^\circ = \gamma_1 + 90^\circ.$$

În modurile proprii de vibrație, masa m are o mișcare rectilinie. Vectorii modali sunt ortogonali $\{u\}_1^T \{u\}_2 = 0$. Mișcarea în primul mod de vibrație are loc pe direcția 1, la $22,5^0$ față de verticală. Mișcarea în al doilea mod de vibrație are loc pe direcția 2, la $122,5^0$ față de verticală, deci perpendicular pe direcția 1. Aceasta se întâmplă deoarece deplasarea în coordonatele modale are loc pe direcțiile principale de flexibilitate.

Matricea de flexibilitate

$$[\delta] = \frac{\ell^3}{6EI} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

este un factor de proporționalitate între vectorul componentelor y și z ale deplasării, și vectorul componentelor f_y și f_z ale unei forțe aplicate în punctul de atașare a masei

$$\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{yy} & \delta_{yz} \\ \delta_{zy} & \delta_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix}.$$

Se consideră sistemul de axe y^*Oz^* , rotit cu un unghi γ față de sistemul de referință yOz . Transformarea deplasărilor se scrie

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ z^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$$

iar transformarea forțelor este definită de

$$\begin{Bmatrix} f_y^* \\ f_z^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix}.$$

Noua relație deplasări-forțe este

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ z^* \end{Bmatrix} = [\delta^*] \begin{Bmatrix} f_y^* \\ f_z^* \end{Bmatrix}$$

unde matricea de flexibilitate

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} [\delta] \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

în care s-a notat $c = \cos\gamma$ și $s = \sin\gamma$.

În sistemul de referință rotit, matricea de flexibilitate este

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} \delta_{yy}c^2 + \delta_{zz}s^2 + 2\delta_{yz}cs & (\delta_{zz} - \delta_{yy})sc + \delta_{yz}(c^2 - s^2) \\ (\delta_{zz} - \delta_{yy})sc + \delta_{yz}(c^2 - s^2) & \delta_{yy}s^2 + \delta_{zz}c^2 - 2\delta_{yz}cs \end{bmatrix}.$$

Există două unghiuri γ^* pentru care elementele nediagonale ale matricii de flexibilitate se anulează, date de

$$\operatorname{tg} 2\gamma^* = \frac{2\delta_{yz}}{\delta_{yy} - \delta_{zz}} = \frac{2 \cdot 3}{8 - 2} = 1, \quad \gamma_1^* = 22,5^0, \quad \gamma_2^* = 112,5^0.$$

Cele două soluții γ_1^* și γ_2^* definesc *direcțiile principale de flexibilitate*. Înlocuind aceste unghiuri în expresia elementelor diagonale se obțin *flexibilitățile principale*

$$\delta_{1,2} = \frac{\delta_{yy} + \delta_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{yy} - \delta_{zz}}{2}\right)^2 + \delta_{yz}^2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{6} \frac{\ell^3}{EI},$$

$$\delta_1 = 1,5404 \frac{\ell^3}{EI}, \quad \delta_2 = 0,1262 \frac{\ell^3}{EI}.$$

Semnificația fizică este următoarea: o forță aplicată pe direcția 1 (sau 2) produce o deplasare numai pe direcția 1 (sau 2). Direcțiile principale de flexibilitate coincid cu direcțiile vibrațiilor în modurile proprii (principale) de vibrație.

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{m\delta_1}} = \frac{1}{\sqrt{1,5404}} \sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}} = 0,805 \sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{m\delta_2}} = \frac{1}{\sqrt{0,1262}} \sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}} = 2,815 \sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}}.$$

b) Pentru a determina răspunsul liber la un impuls vertical cu viteza v , întâi se calculează masele modale

$$M_1 = m(u_{11}^2 + u_{21}^2) = m(1 + 0,4142^2) = 1,1716m,$$

$$M_2 = m(u_{12}^2 + u_{22}^2) = m(1 + 2,4142^2) = 6,8284m.$$

Condițiile inițiale sunt

$$\{x(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{x}(0)\} = \begin{Bmatrix} v \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Din relațiile (3.93) și (3.96) rezultă

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= 0, & \cos \varphi_2 &= 0, \\ C_1 \sin \varphi_1 &= \frac{m v}{\omega_1 M_1}, & C_2 \sin \varphi_2 &= \frac{m v}{\omega_2 M_2}. \end{aligned}$$

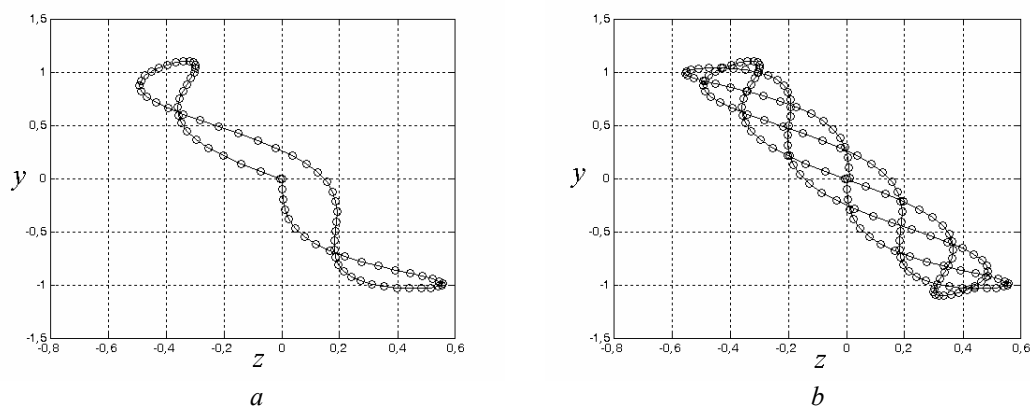


Fig. 3.18

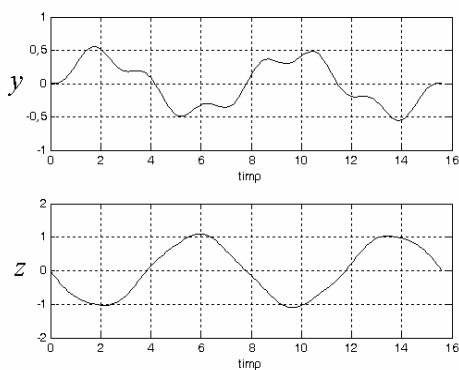


Fig. 3.19

Componenta verticală a deplasării instantanee este

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) u_{11} + C_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) u_{12},$$

$$y(t) = \frac{m v}{\omega_1 M_1} \sin \omega_1 t + \frac{m v}{\omega_2 M_2} \sin \omega_2 t,$$

$$y(t) = C (1,0593 \sin \omega_1 t + 0,0520 \sin \omega_2 t),$$

unde

$$C = v \sqrt{\frac{m \ell^3}{EI}}, \quad \omega_1 = 0,805 v/C, \quad \omega_2 = 2,815 v/C.$$

Componenta orizontală a deplasării instantanee este

$$z(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) u_{21} + C_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) u_{22},$$

$$z(t) = \frac{m v}{\omega_1 M_1} u_{21} \sin \omega_1 t + \frac{m v}{\omega_2 M_2} u_{22} \sin \omega_2 t,$$

$$z(t) = C(0,4387 \sin \omega_1 t - 0,1256 \sin \omega_2 t).$$

Traectoria masei m este redată fig. 3.18, *a* pentru o durată a mișcării egală cu $2\pi/\omega_1$, iar în fig. 3.18, *b* pentru o durată $4\pi/\omega_1$. Variația în timp a componentelor y și z este reprezentată grafic în fig. 3.19. Deplasarea orizontală este aproape armonică deoarece al doilea termen din expresia acesteia are o amplitudine mai mică decât a primului termen.

3.3.5 Răspunsul la excitație armonică

Se consideră vibrațiile staționare ale barei din fig. 3.20, *a* sub acțiunea forței $f(t) = F_0 \cos \omega t$ aplicată masei m_2 .

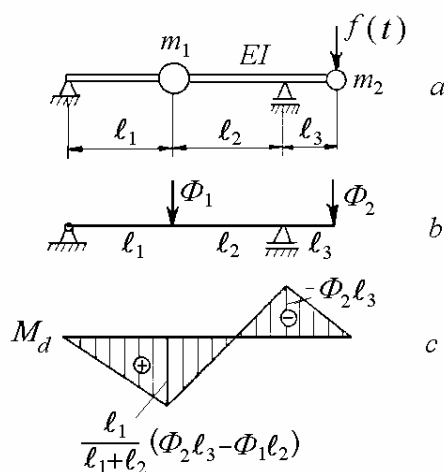


Fig. 3.20

Ecuțiile de mișcare sunt

$$\begin{aligned} y_1 &= -\delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 + (f - m_2 \ddot{y}_2) \delta_{12}, \\ y_2 &= -\delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 + (f - m_2 \ddot{y}_2) \delta_{22}, \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} \delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 + y_1 &= \delta_{12} f(t), \\ \delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 + y_2 &= \delta_{22} f(t). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Înlocuind soluțiile staționare

$$y_1(t) = Y_1 \cos \omega t, \quad y_2(t) = Y_2 \cos \omega t,$$

în ecuațiile (3.97), rezultă sistemul algebric

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2 \delta_{11} m_1) Y_1 - \omega^2 \delta_{12} m_2 Y_2 &= \delta_{12} F_0, \\ -\omega^2 \delta_{21} m_1 Y_1 + (1 - \omega^2 \delta_{22} m_2) Y_2 &= \delta_{22} F_0. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Amplitudinile deplasărilor maselor sunt

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\delta_{12}}{1 - (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) \omega^2 + m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \omega^4} F_0, \\ Y_2 &= \frac{\delta_{22} - m_1 \omega^2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}{1 - (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) \omega^2 + m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \omega^4} F_0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Numitorul este polinomul caracteristic, membrul stâng al ecuației (3.86).

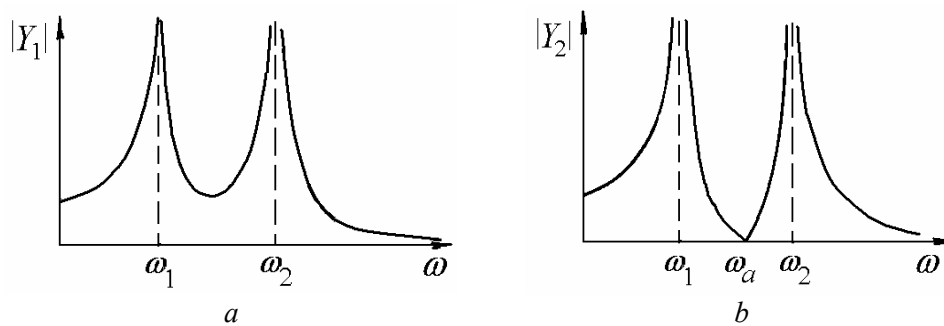


Fig. 3.21

Valorile absolute ale amplitudinilor Y_1 și Y_2 sunt reprezentate grafic în funcție de pulsație în fig. 3.21. Când pulsația forțelor devine egală cu o pulsație proprie a sistemului, amplitudinile cresc nelimitat. Sistemul are două rezonanțe, marcate prin vârfuri infinite în curbele de răspuns în frecvență.

Antirezonanța apare când $Y_2 = 0$, la o pulsație dată de

$$\omega_a^2 = \frac{\delta_{22}}{m_1(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \quad (3.100)$$

Dacă se cunosc amplitudinile deplasărilor răspunsului forțat, se pot calcula amplitudinile forțelor de inerție ce acționează asupra maselor, deci amplitudinile forțelor dinamice care acționează asupra barei (fig. 3.20, *b*) sunt

$$\Phi_1 = m_1 \omega^2 Y_1, \quad \Phi_2 = m_2 \omega^2 Y_2 + F_0. \quad (3.101)$$

Se poate construi apoi diagrama momentelor încovoietoare dinamice (fig. 3.20, *c*), pe baza căreia se pot calcula tensiunile dinamice produse de forța armonică.

Exemplul 3.7

Bara cu greutate proprie neglijabilă din fig. 3.22, *a* are diametrul $d = 40$ mm, $\ell = 1$ m, $E = 210$ GPa și $m = 50$ kg. a) Să se calculeze pulsațiile proprii; b) Să se determine amplitudinile vibrațiilor forțate produse de o forță de amplitudine $F_0 = 20$ N și frecvență 0,179 Hz; c) Să se traseze diagrama momentelor încovoietoare statice și să se determine tensiunile statice maxime; d) Să se traseze diagrama momentelor încovoietoare dinamice și să se calculeze amplitudinea tensiunilor dinamice maxime.

Rezolvare. Coeficienții de flexibilitate sunt

$$\delta_{11} = \ell^3/6EI, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\ell^3/8EI, \quad \delta_{22} = 5\ell^3/24EI.$$

Notând

$$\lambda = \frac{24EI}{\omega^2 m \ell^3},$$

ecuația pulsațiilor proprii este

$$\begin{vmatrix} \lambda - 8 & 3 \\ 6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 13\lambda + 22 = 0,$$

cu rădăcinile

$$\lambda_1 = 11, \quad \lambda_2 = 2.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 1,477 \sqrt{EI/m\ell^3} = 1,073 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2 = 3,464 \sqrt{EI/ml^3} = 2,516 \text{ rad/s}.$$

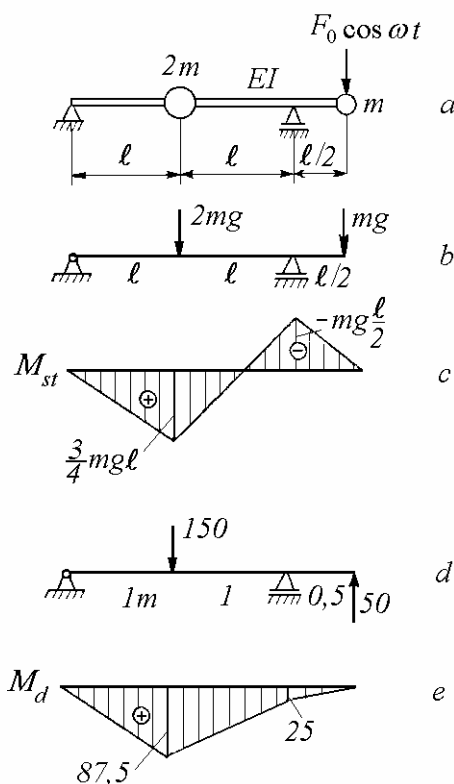


Fig. 3.22

Pentru datele numerice ale problemei, pulsația excitatoare corespunde unei valori $\lambda = 10$. Din relațiile (3.99) se obțin amplitudinile deplasărilor

$$Y_1 = -\frac{3\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)} \frac{F_0}{m\omega^2} = 0,118 \text{ mm},$$

$$Y_2 = -\frac{22-5\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)} \frac{F_0}{m\omega^2} = -1,105 \text{ mm}.$$

Pentru încărcarea statică din fig. 3.22, *b*, diagrama momentelor încovoietoare statică este prezentată în fig. 3.22, *c*. Momentul încovoiător maxim este 368 Nm iar tensiunea statică maximă este $\sigma_{st} = 58,5 \text{ N/mm}^2$.

Amplitudinile (3.101) ale forțelor dinamice sunt

$$\Phi_1 = 2m\omega^2 Y_1 = -\frac{6\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)} F_0 = 150 \text{ N},$$

$$\Phi_2 = m\omega^2 Y_2 + F_0 = \left[1 - \frac{22-5\lambda}{(\lambda-11)(\lambda-2)} \right] F_0 = -50 \text{ N}.$$

Pentru încărcarea dinamică din fig. 3.22, *d*, diagrama momentelor încovoietoare dinamice este prezentată în fig. 3.22, *e*. Momentul încovoiător maxim este 87,5 Nm iar tensiunile dinamice maxime sunt $\sigma_d = 14 \text{ N/mm}^2$.

3.4 Vibrații cuplate de translație și rotație

Când rezultanta forțelor care acționează asupra unui corp rigid rezemat elastic nu trece prin centrul său de greutate, modurile de vibrație de translație și de rotație sunt cuplate. Astfel de cuplaje apar la vibrațiile automobilului pe suspensii, ale motorului automobilului pe flexiblocuri, ale rotoarelor rezemate în două lagăre, ale maselor în consolă la absorbitoarele dinamice de tip Stockbridge de la liniile de înaltă tensiune și în general la bare în consolă cu discuri în capăt.

3.4.1 Ecuțiile de mișcare

Corpul rigid din fig. 3.23, *a* are masa m și momentul de inerție masic față de centrul de greutate J , fiind rezemat la capete pe arcuri cu rigiditățile k_1 , respectiv k_2 . Se poate considera că punctele rigidului se deplasează numai pe verticală. Mișcarea acestuia este complet definită de două coordonate: x – deplasarea liniară a centrului de greutate G , și θ – unghiul de rotație față de G .

Utilizând diagrama forțelor din fig. 3.23, *b*, ecuațiile de mișcare se pot scrie

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_1(x - \ell_1\theta) + k_2(x + \ell_2\theta) &= 0, \\ J\ddot{\theta} - k_1(x - \ell_1\theta)\ell_1 + k_2(x + \ell_2\theta)\ell_2 &= 0 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + (k_2\ell_2 - k_1\ell_1)\theta &= 0, \\ J\ddot{\theta} + (k_2\ell_2 - k_1\ell_1)x + (k_1\ell_1^2 + k_2\ell_2^2)\theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.102)$$

În formă matricială

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2\ell_2 - k_1\ell_1 \\ k_2\ell_2 - k_1\ell_1 & k_1\ell_1^2 + k_2\ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.102, a)$$

Dacă $k_1 l_1 = k_2 l_2$ mișcările sistemului se decuplează. Sistemul are două pulsații proprii independente – una pentru translație pură și una pentru rotație pură

$$\omega_x = \sqrt{(k_1 + k_2)/m} \quad \text{și} \quad \omega_\theta = \sqrt{(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) / J}. \quad (3.103)$$

Pentru cuplaj zero, o forță aplicată în centrul de greutate produce doar translație verticală x , în timp ce un cuplu aplicat rigidului produce doar o rotație θ . Cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricii de rigiditate, motiv pentru care este denumit *cuplaj static*.

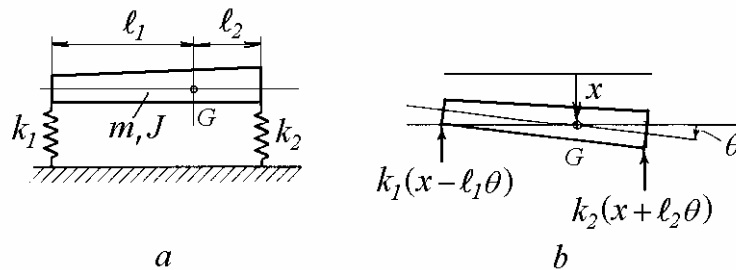


Fig. 3.23

Mișcarea rigidului mai poate fi definită și de alte două coordonate, deplasările liniare ale extremităților (punctele de atașare a arcurilor) x_1 și x_2 . Transformarea între cele două seturi de coordonate este definită de relația

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_1 + l_2} \begin{bmatrix} l_2 & l_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.104)$$

Înlocuind (3.104) în ecuația (3.102, a) și înmulțind la stânga cu transpusa matricii de transformare din (3.104) se obțin următoarele ecuații de mișcare

$$\begin{bmatrix} m l_2^2 + J & m l_1 l_2 - J \\ m l_1 l_2 - J & m l_1^2 + J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(l_1 + l_2) & 0 \\ 0 & k_2(l_1 + l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.105)$$

Cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricii de masă, motiv pentru care este numit *cuplaj dinamic*.

Dacă $J = m l_1 l_2$ mișcarea combinată de translație și rotație poate fi exprimată ca o sumă de vibrații unghiulare, una față de capătul din dreapta al rigidului, cealaltă față de capătul din stânga al acestuia.

4.4.2 Modurile proprii de vibrație

Dacă se notează

$$a = (k_1 + k_2)/m, \quad b = (k_2 \ell_2 - k_1 \ell_1)/m, \quad c = (k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2)/J,$$

ecuațiile (3.102) devin

$$\begin{aligned} \ddot{x} + ax + b\theta &= 0, \\ r^2 \ddot{\theta} + bx + cr^2 \theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.106)$$

unde $r = \sqrt{J/m}$ este raza de girație a corpului rigid.

Admițând soluții de forma

$$x(t) = A_x \cos(\omega t - \varphi), \quad \theta(t) = A_\theta \cos(\omega t - \varphi), \quad (3.107)$$

se obține sistemul de ecuații algebrice

$$\begin{aligned} (a - \omega^2) A_x + b A_\theta &= 0, \\ b A_x + (c - \omega^2) r^2 A_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Ecuațiile (3.108) admit soluții nebanale dacă determinantul coeficienților variabilelor A_x și A_θ este zero

$$\begin{vmatrix} a - \omega^2 & b \\ b & (c - \omega^2) r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.109)$$

sau

$$\omega^4 - (a + c)\omega^2 + (ac - b^2/r^2) = 0. \quad (3.109, a)$$

Rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii (3.109, a) sunt

$$\omega_{1,2}^2 = (a + c)/2 \pm \sqrt{(a - c)^2/4 + b^2/r^2}. \quad (3.110)$$

Prima pulsație proprie ω_1 este totdeauna mai mică decât ω_x și ω_θ , iar a doua pulsație proprie ω_2 este totdeauna mai mare decât ω_x și ω_θ .

Forma modurilor proprii se obține înlocuind pulsațiile proprii, pe rând, în raportul amplitudinilor

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (A_x/A_\theta)_1 = -b/(a - \omega_1^2), \\ \mu_2 &= (A_x/A_\theta)_2 = -b/(a - \omega_2^2). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Exemplul 3.8

Să se determine modurile proprii de vibrație ale sistemului din fig. 3.23 dacă $\ell_1 = 3\ell/4$, $\ell_2 = \ell/4$, $k_1 = k_2 = k$ și $J = m\ell^2/8$.

Rezolvare. Ecuațiile (3.108) au forma

$$\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right) A_x + \frac{k\ell}{2m} A_\theta = 0,$$

$$\frac{k\ell}{2m} A_x + \left(\frac{5k}{m} - \omega^2\right) \frac{\ell^2}{8} A_\theta = 0.$$

Notând

$$\alpha = \frac{\omega^2 m}{k},$$

ecuațiile devin

$$(2 - \alpha) A_x + \frac{\ell}{2} A_\theta = 0,$$

$$\frac{\ell}{2} A_x + (5 - \alpha) \frac{\ell^2}{8} A_\theta = 0.$$

Ecuația pulsațiilor proprii este

$$\alpha^2 - 7\alpha + 8 = 0$$

având rădăcinile

$$\alpha_1 = 1,438, \quad \alpha_2 = 5,561.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 1,199\sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = 2,358\sqrt{k/m}.$$

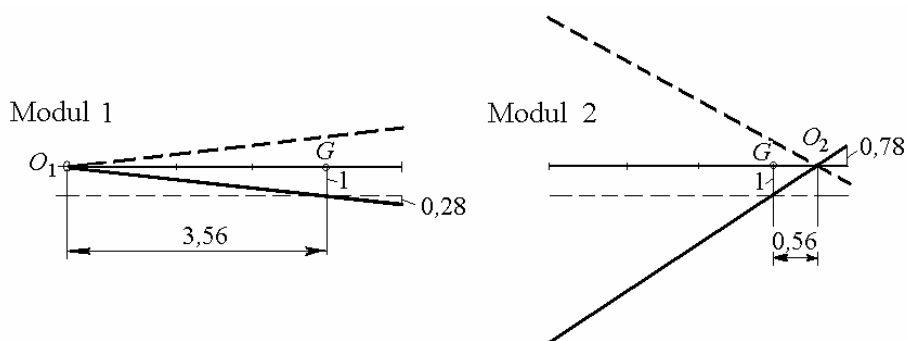


Fig. 3.24

Forma modurilor proprii (prezentată în fig. 3.24) este definită de

$$\left(\frac{A_\theta \ell/4}{A_x}\right)_1 = \frac{2-\alpha_1}{2} = 0,28, \quad \left(\frac{A_\theta \ell/4}{A_x}\right)_2 = \frac{2-\alpha_2}{2} = -1,78.$$

Inversele cu semn schimbat ale rapoartelor amplitudinilor definesc poziția punctelor nodale față de centrul de greutate, cu valori pozitive spre dreapta

$$d_1 = -\left(\frac{A_x}{A_\theta \ell/4}\right)_1 = -\frac{1}{0,28} = -3,56, \quad d_2 = -\left(\frac{A_x}{A_\theta \ell/4}\right)_2 = \frac{1}{1,78} = 0,56.$$

Pulsățiile vibrațiilor decuplate de translație și rotație sunt

$$\omega_x = 1,414\sqrt{k/m}, \quad \omega_\theta = 2,236\sqrt{k/m}.$$

În acest caz, se stabilesc următoarele inegalități

$$\omega_1 < \omega_x < \omega_\theta < \omega_2.$$

Exemplul 3.9

Să se calculeze modurile proprii de vibrație ale sistemului din fig. 3.25, *a* compus dintr-un corp rigid lung, de masă m și moment de inerție masic $J = m\ell^2/8$ atașat la capătul unei bare în consolă, cu modulul de rigiditate la încovoiere EI .

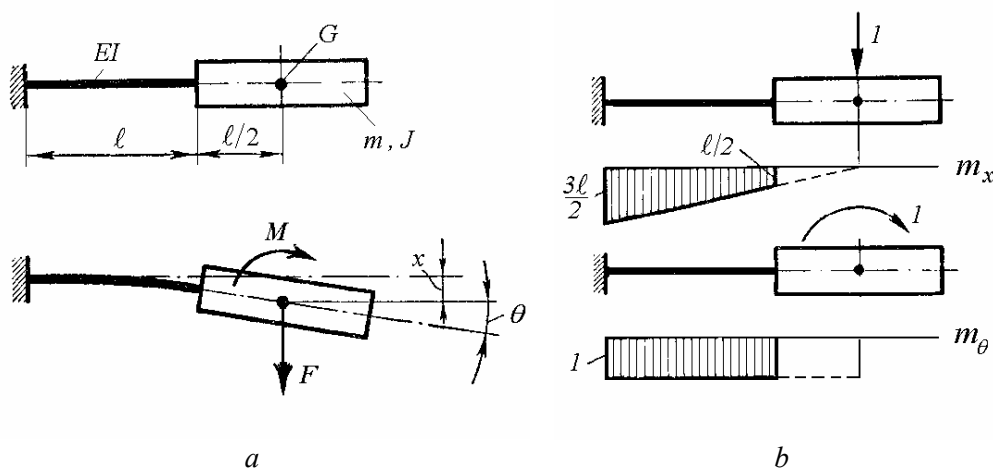


Fig. 3.25

Rezolvare. Mișcarea corpului rigid este definită prin deplasarea liniară x a centrului de greutate G , și prin unghiul de rotație θ față de G .

Ecuțiile de mișcare se pot scrie, aplicând principiul suprapunerii efectelor, sub forma relațiilor între forța de inerție $F = m\omega^2 x$, cuplul de inerție $M = J\omega^2 \theta$ și deplasările de translație x și rotație θ

$$x = \delta_{11} F + \delta_{12} M,$$

$$\theta = \delta_{21} F + \delta_{22} M.$$

În fig. 3.25, *b* s-au construit două diagrame de momente încovoietoare, m_x – pentru încărcarea cu o forță egală cu 1 aplicată în punctul G pe direcția lui F , și m_θ – pentru încărcarea cu un cuplu egal cu 1 aplicat în punctul G pe direcția lui M . Diagramele sunt folosite la calculul coeficienților de flexibilitate cu ajutorul metodei Mohr-Maxwell.

Deplasările pe direcțiile x și θ se notează δ_{11} și δ_{21} , respectiv δ_{12} și δ_{22} . Coeficienții de flexibilitate sunt

$$\delta_{11} = 13\ell^3/12EI, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \ell^2/EI, \quad \delta_{22} = \ell/EI.$$

Înlocuind în ecuațiile de mișcare, rezultă

$$\beta x = 13x + \frac{3}{2}\ell\theta,$$

$$\beta\theta = \frac{12}{\ell}x + \frac{3}{2}\theta,$$

unde

$$\beta = 12EI/m\ell^3\omega^2.$$

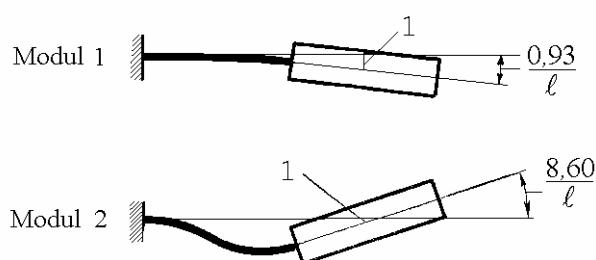


Fig. 3.26

Ecuția pulsațiilor proprii este

$$2\beta^2 - 29\beta + 3 = 0,$$

având rădăcinile $\beta_1 = 14,396$ și $\beta_2 = 0,1042$.

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 0,913 \sqrt{EI/m\ell^3}, \quad \omega_2 = 10,73 \sqrt{EI/m\ell^3}.$$

Forma modurilor proprii (fig. 4.26) este definită de

$$\left(\frac{A_\theta \ell}{A_x} \right)_1 = \frac{\beta_1 - 13}{3/2} = 0,930, \quad \left(\frac{A_\theta \ell}{A_x} \right)_2 = \frac{\beta_2 - 13}{3/2} = -8,597.$$

3.5 Pendule cuplate elastic

Un fenomen interesant apare la vibrațiile libere ale pendulelor cuplate, când are loc un transfer continuu al mișcării de la un pendul la celălalt datorită cuplajului slab printr-un element elastic de rigiditate relativ mică.

3.5.1 Ecuațiile de mișcare

Se consideră două pendule simple (fig. 3.27, a), de lungime ℓ și masă m fiecare, oscilând în plan vertical. Pendulele sunt cuplate între ele cu ajutorul unui arc de rigiditate k , atașat la o distanță d de punctele de suspendare a pendulelor. Arcul este netensionat când pendulele sunt în poziție verticală.

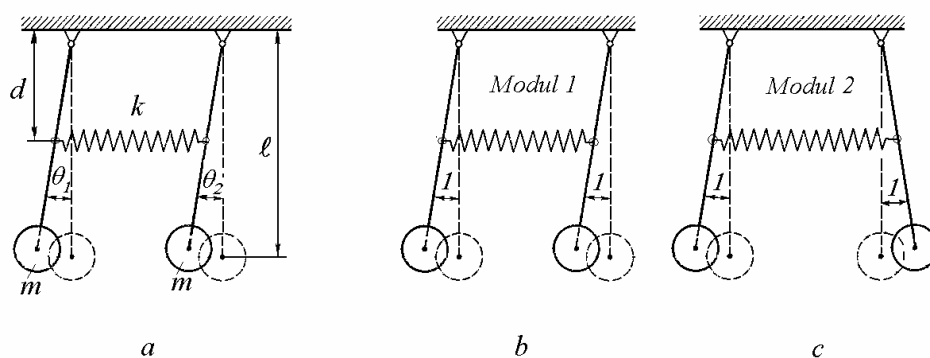


Fig. 3.27

Alegând drept coordonate unghiurile de înclinare ale pendulelor θ_1 și θ_2 și presupunând că sistemul efectuează oscilații de amplitudini mici, expresiile energiilor cinetică și potențială sunt

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2), \quad (3.112)$$

$$U = mgl(1 - \cos\theta_1) + mgl(1 - \cos\theta_2) + \frac{1}{2}kd^2(\theta_2 - \theta_1)^2,$$

sau

$$U = \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2}kd^2(\theta_2 - \theta_1)^2. \quad (3.113)$$

Utilizând ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, 2 \quad (3.114)$$

se obțin următoarele ecuații de mișcare

$$\begin{aligned} m\ell^2 \ddot{\theta}_1 + mgl\theta_1 + kd^2(\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ m\ell^2 \ddot{\theta}_2 + mgl\theta_2 - kd^2(\theta_1 - \theta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.115)$$

În formă matricială, ecuațiile de mișcare se scriu sub forma

$$\begin{bmatrix} m\ell^2 & 0 \\ 0 & m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl + kd^2 & -kd^2 \\ -kd^2 & mgl + kd^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.115, a)$$

Cuplajul este produs de arcul k .

3.5.2 Modurile proprii de vibrație

Înlocuind soluții de forma

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega t - \varphi), \quad \theta_2 = a_2 \cos(\omega t - \varphi)$$

în ecuațiile diferențiale (3.115), se obține sistemul algebric omogen

$$\begin{aligned} (mgl - \omega^2 m\ell^2 + kd^2)a_1 - kd^2 a_2 &= 0, \\ -kd^2 a_1 + (mgl - \omega^2 m\ell^2 + kd^2)a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ecuația pulsațiilor proprii este

$$(mgl - \omega^2 m\ell^2 + kd^2)^2 - (kd^2)^2 = 0$$

sau

$$\omega^4 - 2\left(\frac{g}{\ell} + \frac{kd^2}{m\ell^2}\right)\omega^2 + \left(\frac{g^2}{\ell^2} + 2\frac{kd^2 g}{m\ell^3}\right) = 0.$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2 \frac{kd^2}{m\ell^2}}. \quad (3.116)$$

Forma modurilor proprii este definită de rapoartele amplitudinilor

$$\mu_1 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_1 = +1, \quad \mu_2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_2 = -1. \quad (3.117)$$

În primul mod (fig. 3.27, *b*), pendulele oscilează în fază, cu amplitudini egale. Arcul de cuplaj nu este tensionat iar pendulele oscilează ca și cum nu ar fi cuplate. Pulsația proprie a sistemului este egală cu cea a unui singur pendul $\sqrt{g/\ell}$. În modul al doilea (fig. 3.27, *c*), pendulele oscilează în antifază, cu amplitudini egale și de sens opus. Datorită efectului rigidizant al arcului de cuplaj, pulsația proprie este mai mare decât în primul mod.

3.5.3 Vibrații libere

Soluția generală a vibrațiilor libere (3.14) este

$$\theta_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) u_{11} + C_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) u_{12},$$

$$\theta_2(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) u_{21} + C_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) u_{22},$$

sau

$$\theta_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2),$$

$$\theta_2(t) = \mu_1 a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \mu_2 a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2).$$

Derivând în raport cu timpul, rezultă

$$\dot{\theta}_1(t) = -\omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) - \omega_2 a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2),$$

$$\dot{\theta}_2(t) = -\mu_1 \omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) - \mu_2 \omega_2 a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2).$$

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale. Dacă este deplasat numai pendulul din stânga

$$\theta_1(0) = \theta_0, \quad \theta_2(0) = 0, \quad \dot{\theta}_1(0) = 0, \quad \dot{\theta}_2(0) = 0. \quad (3.118)$$

Deoarece $\mu_1 = 1$ și $\mu_2 = -1$, se obține

$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 = \theta_0, \quad a_1 \cos \varphi_1 - a_2 \cos \varphi_2 = 0,$$

$$\omega_1 a_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 a_2 \sin \varphi_2 = 0, \quad \omega_1 a_1 \sin \varphi_1 - \omega_2 a_2 \sin \varphi_2 = 0,$$

astfel încât

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

$$2a_1 \cos \varphi_1 = 2a_2 \cos \varphi_2 = \theta_0, \quad a_1 = a_2 = \theta_0/2.$$

Valorile instantanee ale deplasărilor unghiulare sunt

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\theta_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \theta_0 \cos \omega_m t \cdot \cos \Delta \omega t, \\ \theta_2(t) &= \frac{\theta_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \theta_0 \sin \omega_m t \cdot \sin \Delta \omega t, \end{aligned} \quad (3.119)$$

unde

$$\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2 \text{ și } \Delta \omega = (\omega_2 - \omega_1)/2.$$

Când $\Delta \omega$ este mic în raport cu ω_m , produsele din relațiile de mai sus reprezintă oscilații modulate în amplitudine, numite *bătăi*. Această condiție este echivalentă cu

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 \ll \omega_1^2, \quad \frac{g}{\ell} + 2 \frac{k d^2}{m \ell^2} - \frac{g}{\ell} \ll \frac{g}{\ell} \text{ sau } k \ll \frac{g m \ell}{2 d^2},$$

deci bătaile pot apare doar pentru valori mici ale rigidității k a arcului de cuplaj.

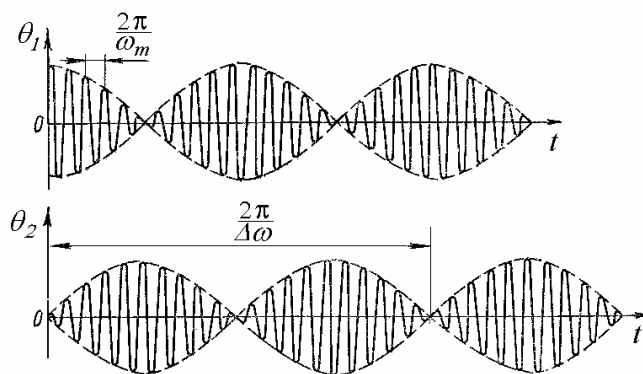


Fig. 3.28

Relațiile (3.119) arată că θ_1 și θ_2 sunt date de funcții *sinus* și *cosinus* care sunt defazate între ele cu 90° . Când $\theta_1 = \theta_0$, atunci $\theta_2 = 0$ și reciproc (fig.3.28).

Defazajul între cele două mișcări este

$$\varphi = (\omega_2 t - \varphi_2) - (\omega_1 t - \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1) t - (\varphi_2 - \varphi_1) = 2\Delta \omega t - \Delta \varphi$$

având o variație lentă în timp.

La $t = 0$, unghiurile de înclinare au valorile $\theta_1 = \theta_0$, respectiv $\theta_2 = 0$.

La $\Delta\omega t = \pi/2$, înclinările sunt $\theta_1 = 0$ și $\theta_2 = \theta_0 \sin \frac{\omega_m \pi}{\Delta\omega} = \theta_0$, dacă $\omega_m / \Delta\omega = n$ este număr întreg.

La $\Delta\omega t = \pi$, înclinările sunt $\theta_2 = 0$ și $\theta_1 = \theta_0 \cos \frac{\omega_m \pi}{\Delta\omega} = -\theta_0$, dacă $\omega_m / \Delta\omega = n$ este număr întreg.

Prin condițiile inițiale (3.118) pendulul din stânga este menținut deplasat, în timp ce pendulul din dreapta este menținut vertical, apoi pendulele sunt eliberate (fig. 3.29, *a*).

La început pendulul din stânga va oscila, în timp ce pendulul din dreapta va sta aproape fix. Apoi pendulul din dreapta va oscila cu amplitudini tot mai mari, în timp ce amplitudinile oscilațiilor pendulului din stânga vor scădea. După un timp, pendulul din stânga va sta fix, în timp ce pendulul din dreapta va oscila cu amplitudinea maximă (fig. 3.29, *d*). Apoi fenomenul se repetă în ordine inversă. Are loc un transfer continuu de energie de la un pendul la celălalt până când amortizarea inerentă (neglijată în această analiză) aduce sistemul în repaus.

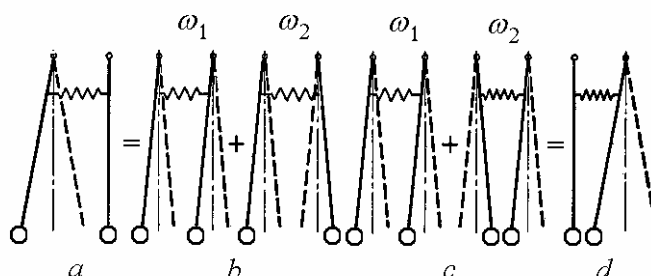


Fig. 3.29

Exprimată în funcție de modurile de vibrație componente, mișcarea poate fi privită ca suma a două mișcări armonice cu pulsațiile proprii ω_1 și ω_2 . Se consideră că inițial mișcarea în modul al doilea este astfel încât pendulele sunt îndepărtate unul de celălalt (fig. 3.29, *b*). Defazajul între moduri crește în timp. Mișcarea în modul al doilea este mai rapidă decât în primul mod, până când este defazată 180° înaintea primului mod (fig. 3.29, *c*). Mișcarea în modul al doilea este astfel încât pendulele se apropie unul de celălalt. Însușind mișcările, se ajunge la situația când pendulul din stânga stă nemișcat, în timp ce pendulul din dreapta oscilează cu amplitudine maximă. În timp, amplitudinea va crește la pendulul din stânga și întreaga secvență se repetă.

3.6 Sisteme amortizate

În paragrafele precedente s-au studiat doar sisteme neamortizate. În continuare se introduce efectul amortizării vâscoase. În general, amortizarea produce cuplarea coordonatelor. Pentru simplificare, se va considera cazul special al amortizării proporționale. Valori relativ mici ale amortizării limitează amplitudinea vibrațiilor la rezonanță. Valori mai mari pot face ca unele moduri să fie amortizate supracritic iar mișcarea corespunzătoare să fie aperiodică.

3.6.1 Amortizarea vâscoasă proporțională

Se consideră sistemul din fig. 3.30, *a*. Disiparea energiei este convenabil modelată prin amortizarea vâscoasă, reprezentată prin amortizoarele c_1 și c_2 . Forțele de amortizare vâscoasă sunt proporționale și de semn contrar cu viteza relativă a capetelor amortizoarelor (fig. 3.30, *b*). Ecuațiile de mișcare se scriu însumând forțele care acționează asupra fiecărei mase:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_1 - x_2) - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.120)$$

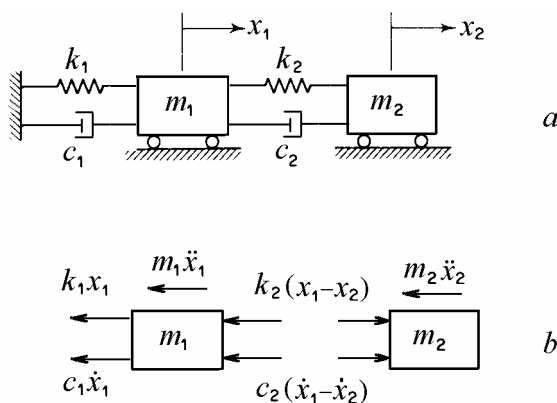


Fig. 3.30

Cuplajul între cele două coordonate este produs de rigiditatea k_2 și de coeficientul de amortizare c_2 .

În formă matricială, cele două ecuații se scriu

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.121)$$

sau, în formă compactă,

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}, \quad (3.121, a)$$

unde $[c]$ este *matricea de amortizare*, iar $\{\dot{x}\}$ este *vectorul vitezelor*.

Matricea de amortizare este simetrică, deci

$$[c] = [c]^T.$$

Matricea maselor este diagonală. Cuplajul este produs de elementele nediagonale ale matricilor de rigiditate și de amortizare.

Ecuțiile (3.121) pot fi rezolvate cu ajutorul *analizei modale* dacă transformarea liniară bazată pe matricea modală diagonalizează matricea de amortizare simultan cu matricile de masă și de rigiditate. Aceasta se obține simplu dacă matricea de amortizare poate fi exprimată ca o combinație liniară a matricilor de masă și de rigiditate, deci dacă

$$[c] = \alpha [m] + \beta [k], \quad (3.122)$$

unde α și β sunt constante. Această formă de amortizare se numește *amortizare proporțională* sau *amortizare de tip Rayleigh*. Există și alte condiții în care matricea amortizării modale devine diagonală, dar acestea sunt cazuri speciale care se întâlnesc mai rar.

3.6.2 Vibrații libere amortizate

Dacă se rezolvă problema neamortizată (3.3), se obțin modurile proprii neamortizate de vibrații. Matricea modală (3.24) se construiește cu vectorii modurilor normale pe coloane. Utilizând transformarea de coordonate

$$\{x\} = [u]\{q\} \quad (3.123)$$

și înmulțind la stânga cu $[u]^T$ rezultă

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}, \quad (3.124)$$

unde

$$[M] = [u]^T [m] [u], \quad [C] = [u]^T [c] [u], \quad [K] = [u]^T [k] [u]. \quad (3.125)$$

Matricile modale $[M]$ și $[K]$ sunt diagonale, în timp ce matricea $[C]$ este diagonală doar în cazul amortizării proporționale, când

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]. \quad (3.126)$$

În acest caz, se stabilesc următoarele relații de ortogonalitate

$$\{u\}_s^T [c] \{u\}_r = 0, \quad r \neq s, \quad r, s = 1, 2 \quad (3.127)$$

Cu amortizare proporțională, ecuațiile modale decuplate sunt de forma

$$M_r \ddot{q}_r + C_r \dot{q}_r + K_r q_r = 0, \quad r = 1, 2 \quad (3.128)$$

unde M_r și K_r sunt definiți de (3.26) și (3.28), iar

$$C_r = \{u\}_r^T [c] \{u\}_r, \quad r = 1, 2 \quad (3.129)$$

sunt coeficienții de *amortizare modală*.

Pentru mase modale egale cu 1, rigiditățile modale sunt egale cu pătratul pulsației proprii respective și coeficienții de amortizare modală se pot scrie sub forma $2\zeta_r \omega_r$, unde ω_r este pulsația proprie și ζ_r este *raportul de amortizare modală* ale modului r .

Ecuatiile (3.128) devin

$$\ddot{q}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = 0, \quad r = 1, 2 \quad (3.130)$$

și pentru $0 < \zeta_r < 1$ au soluții de forma (2.46)

$$q_r(t) = A_r e^{-\zeta_r \omega_r t} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r t + \phi_r\right). \quad r = 1, 2 \quad (3.131)$$

Soluțiile (3.131) se pot obține și direct. Căutând soluții de forma $x_r = a_r e^{st}$, ecuațiile (3.121) devin

$$\begin{aligned} m_1 s^2 a_1 + (c_1 + c_2) s a_1 - c_2 s a_2 + (k_1 + k_2) a_1 - k_2 a_2 &= 0, \\ m_2 s^2 a_2 - c_2 s a_1 + c_2 s a_2 - k_2 a_1 + k_2 a_2 &= 0, \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} \left[m_1 s^2 + (c_1 + c_2) s + (k_1 + k_2) \right] a_1 - (c_2 s + k_2) a_2 &= 0, \\ -(c_2 s + k_2) a_1 + \left(m_2 s^2 + c_2 s + k_2 \right) a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Condiția de a avea soluții nebanale conduce la ecuația caracteristică

$$\left[m_1 s^2 + (c_1 + c_2) s + (k_1 + k_2) \right] \left(m_2 s^2 + c_2 s + k_2 \right) - (c_2 s + k_2)^2 = 0. \quad (3.133)$$

La sisteme amortizate subcritic, ecuația (3.133) are două perechi de rădăcini complexe conjugate, de forma

$$s_{1,2} = -\sigma_1 \pm i\omega_{d1}, \quad s_{3,4} = -\sigma_2 \pm i\omega_{d2}, \quad (3.134)$$

unde ω_{d1} și ω_{d2} sunt pulsațiile proprii amortizate iar σ_1 și σ_2 sunt factori de amortizare (constante de atenuare).

Între parametrii de mai sus și valorile absolute ale pulsațiilor proprii (egale cu pulsațiile proprii neamortizate ale sistemelor cu amortizare proporțională) și rapoartele de amortizare se stabilesc următoarele relații:

$$\sigma_r = \zeta_r \omega_r, \quad \omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad r = 1, 2 \quad (3.135, a)$$

$$\zeta_r = \frac{\sigma_r}{\omega_r}, \quad \omega_r = \frac{\sigma_r}{\zeta_r} = \sqrt{\omega_{dr}^2 + \sigma_r^2}. \quad r = 1, 2 \quad (3.135, b)$$

Cu aceste notații, expresia (3.131) devine

$$q_r(t) = A_r e^{-\sigma_r t} \sin(\omega_{dr} t + \phi_r). \quad r = 1, 2 \quad (3.131, a)$$

Pentru valori relativ mari ale amortizării, ecuația (3.133) poate avea fie două rădăcini reale și două rădăcini complexe conjugate, când unul din modurile de vibrație este amortizat supracritic, fie două perechi de rădăcini reale, când ambele moduri sunt amortizate supracritic și sistemul are mișcare aperiodică. Studiul acestor cazuri nu face obiectul acestei lucrări.

Înlocuind soluțiile (3.134) în (3.132), se obțin rapoartele amplitudinilor $(a_2/a_1)_r$ care, dacă amortizarea este proporțională, definesc *moduri reale* de vibrație. Analiza de mai sus se referă la sisteme cu pulsații proprii distincte. Cazul pulsațiilor proprii egale este tratat în alte lucrări.

Exemplul 3.10

Să se calculeze modurile de vibrație ale sistemului din fig. 3.30, luând pentru simplificare $m_1 = 2$, $k_1 = 2$, $c_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_2 = 1$, $c_2 = 0,5$, în unități adecvate.

Rezolvare. Ecuațiile vibrațiilor proprii (3.121) sunt

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Se observă că

$$[c] = 0,5 [k].$$

Ecuațiile (3.132) devin

$$\begin{aligned} (2s^2 + 1,5s + 3)a_1 - (0,5s + 1)a_2 &= 0, \\ -(0,5s + 1)a_1 + (s^2 + 0,5s + 1)a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ecuția caracteristică este

$$(2s^2 + 1,5s + 3)(s^2 + 0,5s + 1) - (0,5s + 1)^2 = 0,$$

sau

$$2s^4 + 2,5s^3 + 5,5s^2 + 2s + 2 = 0,$$

cu rădăcinile

$$s_{1,2} = -\frac{1}{8} \pm i \frac{\sqrt{31}}{8}, \quad s_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Părțile imaginare sunt pulsațiile proprii amortizate

$$\omega_{d1} = \sqrt{31}/8 = 0,6960, \quad \omega_{d2} = \sqrt{7}/2 = 1,3229.$$

Părțile reale sunt factorii de amortizare (constantele de atenuare)

$$\sigma_1 = 0,125, \quad \sigma_2 = 0,5.$$

Pulsațiile proprii neamortizate sunt egale cu modulele valorilor proprii

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_{d1}^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{(\sqrt{31}/8)^2 + (1/8)^2} = 1/\sqrt{2}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_{d2}^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(\sqrt{7}/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Rapoartele de amortizare modale sunt

$$\zeta_1 = \frac{\sigma_1}{\omega_1} = \frac{1/8}{1/\sqrt{2}} = 0,176, \quad \zeta_2 = \frac{\sigma_2}{\omega_2} = \frac{1/2}{\sqrt{2}} = 0,353.$$

Raportul amplitudinilor

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2s^2 + 1,5s + 3}{0,5s + 1} = \frac{0,5s + 1}{s^2 + 0,5s + 1}$$

are următoarele valori pentru cele două moduri

$$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)_1 = 2, \quad \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_2 = -1.$$

Prin rezolvarea problemei neamortizate în Exemplul 3.1, s-au obținut aceleași pulsații proprii neamortizate și forme ale modurilor reale de vibrație.

Exemplul 3.11

Să se calculeze parametrii modali ai sistemului din fig. 3.30 pentru aceleași valori ale maselor și rigidităților, dar cu amortizare mai mică $[c] = 0,1 [k]$.

Rezolvare. Ecuțiile (3.132) devin

$$\begin{aligned} (2s^2 + 0,3s + 3)a_1 - (0,1s + 1)a_2 &= 0, \\ -(0,1s + 1)a_1 + (s^2 + 0,1s + 1)a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ecuția caracteristică

$$2s^4 + 0,5s^3 + 5,02s^2 + 0,4s + 2 = 0,$$

are rădăcinile

$$s_{1,2} = -\frac{1}{40} \pm i \frac{\sqrt{799}}{40}, \quad s_{3,4} = -\frac{1}{10} \pm i \frac{\sqrt{199}}{10}$$

sau

$$s_{1,2} = -0,025 \pm i 0,70666, \quad s_{3,4} = -0,1 \pm i 1,41067.$$

Pulsațiile proprii amortizate sunt

$$\omega_{d1} = 0,70666, \quad \omega_{d2} = 1,4107.$$

Factorii de amortizare au valorile

$$\sigma_1 = 0,025, \quad \sigma_2 = 0,1.$$

Rapoartele de amortizare modale sunt

$$\zeta_1 = 0,0353, \quad \zeta_2 = 0,0707.$$

Pulsațiile proprii neamortizate și formele modale sunt aceleași ca în Exemplul 3.10.

3.6.3 Răspunsul la excitație armonică

Se consideră vibrațiile sistemului cu două grade de libertate din fig. 3.31 sub acțiunea forțelor $f_1(t)$ și $f_2(t)$.

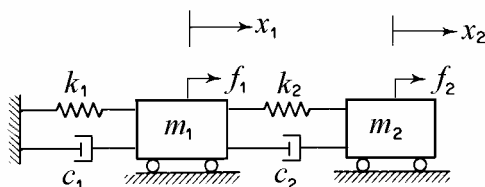


Fig. 3.31

Ecuțiile de mișcare sunt

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= f_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= f_2(t), \end{aligned} \quad (3.136)$$

sau în formă matricială compactă

$$[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{f\}. \quad (3.136, a)$$

3.6.3.1 Funcțiile de transfer

Aplicând transformata Laplace ecuației (3.136, a) și presupunând toate condițiile inițiale nule se obține

$$[[m]s^2 + [c]s + [k]] \{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.137)$$

sau

$$[B(s)] \{X(s)\} = \{F(s)\}, \quad (3.138)$$

unde $[B(s)]$ este *matricea sistemului*.

Înmulțind la stânga cu $[B(s)]^{-1} = [H(s)]$ rezultă

$$[H(s)] \{F(s)\} = \{X(s)\} \quad (3.139)$$

unde $[H(s)]$ este *matricea funcțiilor de transfer*. Aceasta este inversa matricii sistemului.

Pentru sistemul din fig. 3.31 această matrice are forma

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} m_2 s^2 + c_2 s + k_2 & c_2 s + k_2 \\ c_2 s + k_2 & m_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} m_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 s^2 + c_2 s + k_2 \end{bmatrix} - (c_2 s + k_2)^2} \quad (3.140)$$

Numitorul expresiei (3.140) este $\det[B(s)]$, polinomul caracteristic al sistemului. Acesta poate fi scris sub formă de produs

$$\det[B(s)] = A (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4),$$

unde A este o constantă și s_1, \dots, s_4 sunt rădăcinile ecuației caracteristice (3.133). Deoarece coeficienții ecuației caracteristice sunt reali, pentru valori relativ mici ale amortizării rădăcinile sunt complexe conjugate. Ele se numesc *polii* funcției de transfer.

Relația (3.139) mai poate fi scrisă sub forma

$$\begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{Bmatrix}. \quad (3.141)$$

unde $h_{\ell j}(s)$ poate fi determinată excitând sistemul în punctul j și măsurând răspunsul în punctul ℓ . De exemplu, $h_{11}(s)$ este o *funcție de transfer directă* (în punctul de excitație) obținută excitând sistemul cu $F_1(s)$ și măsurând răspunsul $X_1(s)$

$$h_{11}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{m_2 s^2 + c_2 s + k_2}{A (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}. \quad (3.142)$$

3.6.3.2 Funcțiile de răspuns în frecvență

O *funcție de răspuns în frecvență* (FRF) este funcția de transfer evaluată pe axa pulsațiilor $i\omega$. Înlocuind $s = i\omega$ în (3.141) rezultă

$$\begin{bmatrix} h_{11}(i\omega) & h_{12}(i\omega) \\ h_{21}(i\omega) & h_{22}(i\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix}$$

sau

$$[H(i\omega)] \{F(\omega)\} = \{X(\omega)\}, \quad (3.143)$$

unde $[H(i\omega)]$ este *matricea funcțiilor de răspuns în frecvență* iar $X_j(\omega)$, $F_j(\omega)$ sunt transformatele Fourier ale răspunsului, respectiv excitației.

Răspunsul sistemului poate fi definit în *domeniul frecvențelor* prin sume de produse între funcțiile de răspuns în frecvență măsurate experimental și transformatele excitației

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= h_{11}(i\omega)F_1(\omega) + h_{12}(i\omega)F_2(\omega), \\ X_2(\omega) &= h_{21}(i\omega)F_1(\omega) + h_{22}(i\omega)F_2(\omega). \end{aligned} \quad (3.143, a)$$

Răspunsul forțat al sistemului în *domeniul timpului*, $x_1(t)$ și $x_2(t)$, poate fi determinat apoi calculând transformatele Fourier inverse ale răspunsului, $X_1(\omega)$ și $X_2(\omega)$.

Exemplul 3.12

Să se calculeze matricea funcțiilor de răspuns în frecvență pentru sistemul cu două grade de libertate din Exemplul 3.11 și să se traseze curbele FRF $h_{11}(i\omega)$.

Rezolvare. Înlocuind $s = i\omega$, matricea FRF (3.140) devine

$$[H(i\omega)] = \frac{\begin{bmatrix} 1 - \omega^2 + i0,1\omega & 1 + i0,1\omega \\ 1 + i0,1\omega & 3 - 2\omega^2 + i0,3\omega \end{bmatrix}}{2\omega^4 - 5,02\omega^2 + 2 + i(-0,5\omega^3 + 0,4\omega)}$$

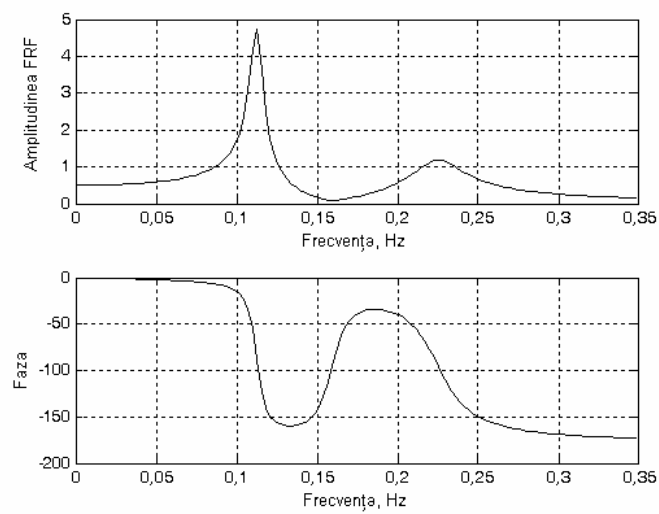


Fig. 3.32

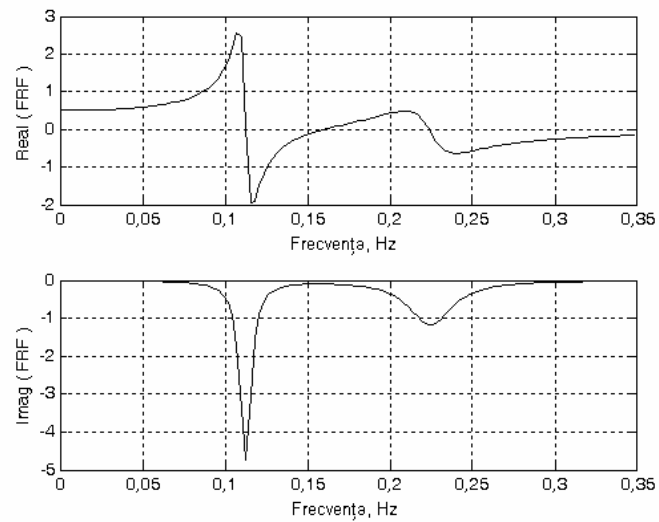


Fig. 3.33

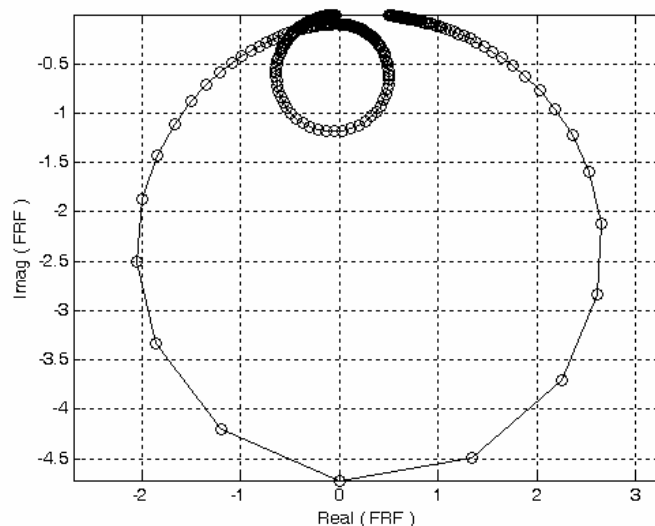


Fig. 3.34

Diagramele amplitudinii și unghiului de fază al FRF sunt prezentate în fig. 3.32. Diagrama amplitudinii are două vârfuri de rezonanță. Datorită amortizării mai mari în modul al doilea, vârful respectiv de rezonanță are amplitudine mai mică. La rezonanțe, unghiul de fază este aproximativ -90^0 . Diagramele componentelor reală și imaginară sunt prezentate în fig. 3.33. Diagrama Nyquist este dată în fig. 3.34 cu puncte marcate la intervale egale de frecvență.

3.6.3.3 Rezolvare prin analiza modală

Utilizând transformarea de coordonate (3.123) $\{x\} = [u]\{q\}$ și înmulțind la stânga cu $[u]^T$, ecuațiile (4.136, a) devin

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = [u]^T\{f\} = \{F\}. \quad (3.144)$$

Cu amortizare proporțională, ecuațiile modale decuplate au forma

$$M_r \ddot{q}_r + C_r \dot{q}_r + K_r q_r = F_r, \quad r = 1, 2 \quad (3.145)$$

sau

$$\ddot{q}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = F_r / M_r, \quad r = 1, 2 \quad (3.146)$$

În cazul excitației și răspunsului armonic, se notează

$$\{f\} = \{\hat{f}\} e^{i\omega t}, \quad \{x\} = \{\tilde{x}\} e^{i\omega t}, \quad (3.147)$$

$$\{F\} = \{\hat{F}\} e^{i\omega t}, \quad \{q\} = \{\tilde{q}\} e^{i\omega t}, \quad (3.148)$$

deci transformarea (3.123) se scrie

$$\{\tilde{x}\} = [u] \{\tilde{q}\} = \sum_{r=1}^2 \tilde{q}_r \{u\}_r, \quad (3.149)$$

unde o “căciulă” deasupra literei denotă amplitudinea reală iar o tildă deasupra literei denotă amplitudinea complexă.

Înlocuind (3.148) în ecuațiile (3.145) și (3.146) rezultă

$$\tilde{q}_r = \frac{\{u\}_r^T \{\hat{f}\}}{K_r - \omega^2 M_r + i \omega C_r} = \frac{\{u\}_r^T \{\hat{f}\}}{M_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i 2 \zeta_r \omega \omega_r)}. \quad (3.150)$$

Normalizând vectorii modali astfel încât masele modale să fie egale cu unitatea, $M_r = 1$, înlocuind (3.150) în (3.149) se obține

$$\{\tilde{x}\} = \sum_{r=1}^2 \frac{\{u\}_r^T \{\hat{f}\} \{u\}_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i 2 \zeta_r \omega \omega_r}$$

sau

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^2 \frac{\{u\}_r \{u\}_r^T}{\omega_r^2 - \omega^2 + i 2 \zeta_r \omega \omega_r} \begin{Bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.151)$$

De observat că produsul diadic $\{u\}_r \{u\}_r^T$ este o matrice pătrată 2×2 .

Matricea FRF (3.143) poate fi exprimată în funcție de parametrii modali

$$[H(i\omega)] = \frac{\{u\}_1 \{u\}_1^T}{\omega_1^2 - \omega^2 + i 2 \zeta_1 \omega \omega_1} + \frac{\{u\}_2 \{u\}_2^T}{\omega_2^2 - \omega^2 + i 2 \zeta_2 \omega \omega_2}. \quad (3.152)$$

Dacă elementul j al vectorului modal r se notează $(u_r)_j$, atunci funcția de răspuns în frecvență $h_{j\ell}(i\omega)$ poate fi exprimată ca sumă de fracții parțiale

$$h_{j\ell}(i\omega) = \frac{(u_1)_j (u_1)_\ell}{\omega_1^2 - \omega^2 + i 2 \zeta_1 \omega \omega_1} + \frac{(u_2)_j (u_2)_\ell}{\omega_2^2 - \omega^2 + i 2 \zeta_2 \omega \omega_2}. \quad (3.153)$$

Această expresie arată explicit contribuția separată a fiecărui mod de vibrație la răspunsul sistemului la o anumită pulsație.

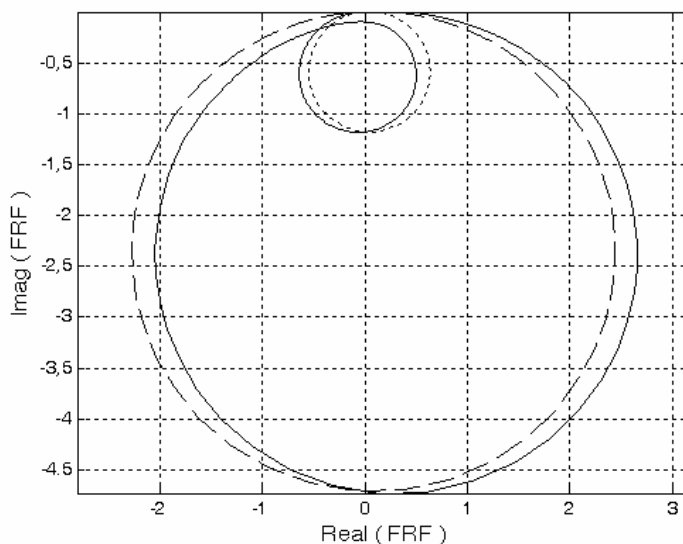


Fig. 3.35

Exemplul 3.13

Să se calculeze dezvoltarea în fracții parțiale a matricii FRF a sistemului cu două grade de libertate din Exemplul 3.12.

Rezolvare. Vectorii modali, normalizați cu mase modale egale cu 1, sunt

$$\{u\}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \right\}^T, \quad \{u\}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}^T.$$

Matricea FRF (3.152) devine

$$[H(i\omega)] = \frac{\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}{0,5 - \omega^2 + i 0,05 \omega} + \frac{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{2 - \omega^2 + i 0,2 \omega}.$$

Pentru prima masă, FRF în punctul de excitare este

$$h_{11}(i\omega) = \frac{1/6}{0,5 - \omega^2 + i 0,05 \omega} + \frac{1/3}{2 - \omega^2 + i 0,2 \omega}.$$

În figura 3.35 se prezintă diagrama Nyquist (linie continuă) care se obține prin însumarea diagramelor construite pentru fiecare termen din dezvoltarea în sumă de fracții parțiale (linii întrerupte).

3.6.4 Amortizorul vâscos neacordat

Amortizorul de vibrații vâscos neacordat (amortizorul Houdaille) este utilizat la unele motoare cu ardere internă pentru a limita amplitudinile vibrațiilor torsionale pe un domeniu larg de turații. El constă dintr-un disc rigid care se poate roti liber într-o cavitate cilindrică umplută cu un fluid vâscos. La motoarele de automobil acesta este plasat la capătul arborelui cotit, în roata care antrenează cureaua ventilatorului.

Arborele cotit este modelat simplificat ca o bară în consolă, cu rigiditatea la răsucire K . Amortizorul atașat la capătul liber are o carcasă cu momentul de inerție masiv J (fig. 3.36) în care se poate roti liber un disc cu momentul de inerție masiv J_d , asupra căruia acționează un cuplu de amortizare proporțional cu viteza unghiulară relativă între carcasă și disc. Dacă amortizorul este sollicitat de un cuplu exterior armonic $M_0 \cos \omega t$, ecuațiile de mișcare se pot scrie

$$\begin{aligned} J \ddot{\theta} + K \theta + c (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) &= M_0 \cos \omega t, \\ J_d \ddot{\theta}_d - c (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) &= 0, \end{aligned} \quad (3.154)$$

unde θ este rotirea carcasei și θ_d este rotirea discului interior. Coeficientul de amortizare are expresia (Harris și Crede, 1968)

$$c = 2\pi \mu \left(\frac{b R_2^3}{h_2} + \frac{R_2^4 - R_1^4}{2h_1} \right), \quad (3.155)$$

unde μ este vâscozitatea uleiului.

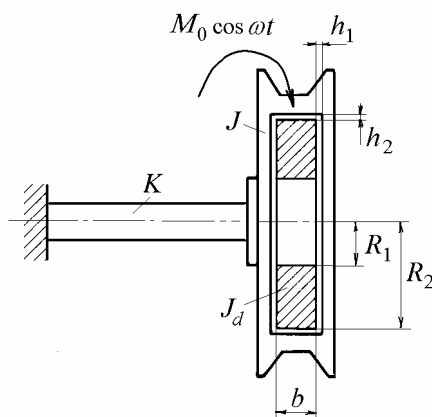


Fig. 3.36

Presupunând soluții de forma

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t, \quad \theta_d = \theta_{d0} \cos(\omega t - \varphi),$$

și notând

$$\omega_n^2 = \frac{K}{J}, \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \zeta = \frac{c}{2J_d \omega_n}, \quad \lambda = \frac{J_d}{J}, \quad (3.156)$$

amplitudinea adimensională a carcusei este dată de

$$\left| \frac{K \theta_0}{M_0} \right| = \frac{\sqrt{\eta^2 + 4\zeta^2}}{\sqrt{\eta^2(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2(\eta^2 + \lambda\eta^2 - 1)^2}}. \quad (3.157)$$

Pentru o valoare dată λ , diagramele amplitudinii adimensionale $|K \theta_0/M_0|$ sunt prezentate în funcție de pulsația adimensională η în fig. 3.37, pentru câteva valori ale raportului de amortizare ζ .

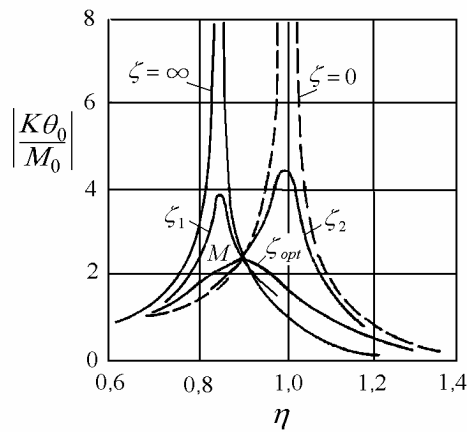


Fig. 3.37

Pentru $\zeta = 0$, curba corespunde unui sistem neamortizat cu pulsația de rezonanță ω_n , a cărui amplitudine este infinită la $\eta = 1$. Pentru $\zeta = \infty$, curba corespunde unui sistem neamortizat cu pulsația de rezonanță $\sqrt{K/(J+J_d)} = \omega_n/\sqrt{1+\lambda}$, în care discul și carcasa amortizorului se mișcă împreună ca o singură masă. Curbele trasate pentru aceste două valori extreme ale lui ζ se intersectează în punctul M , de abscisă $\eta_M = \sqrt{2/(2+\lambda)}$. Pentru orice altă valoare a amortizării, toate curbele răspunsului trec prin acest punct. Există o valoare optimă a amortizării

$$\zeta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda)(2+\lambda)}} \quad (3.158)$$

pentru care amplitudinea la rezonanță este minimă și egală cu ordonata $1+(2/\lambda)$ a punctului M .

Pe baza ecuațiilor (3.156) și (3.158) se poate proiecta un amortizor de vibrații torsionale cu o curbă de răspuns aplatisată, eficient într-un domeniu larg de frecvențe excitatoare.

3.6.5 Absorbitorul de vibrații amortizat

Un *absorbitor dinamic de vibrații* constă dintr-un sistem secundar masă-arc atașat sistemului primar (inițial) masă-arc pentru a-l proteja contra vibrațiilor.

Principalul efect al atașării unui sistem secundar este transformarea dintr-un sistem cu un grad de libertate într-un sistem cu două grade de libertate. Valorile parametrilor fizici ai absorbitorului se aleg astfel încât deplasarea (sau alt parametru cinematic al) sistemului principal să fie minimă. Masa adăugată trebuie să aibă o mișcare suficient de mare ca să “absoarbă” energia introdusă în sistem de forța care acționează asupra masei inițiale. Dacă se ține cont de amortizarea din sistemul secundar, deplasarea masei principale nu poate fi redusă la zero, însă domeniul util de lucru al absorbitorului crește, îmbunătățindu-i eficiența.

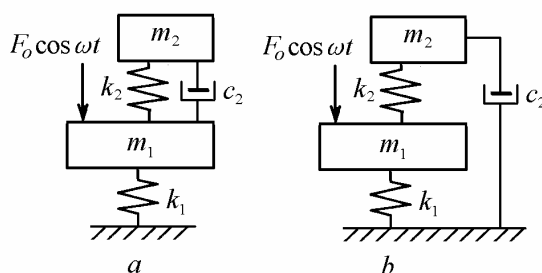


Fig. 3.38

3.6.5.1 Sistemul primar acționat de o forță armonică

Se consideră răspunsul armonic al unui sistem cu două grade de libertate, compus dintr-un sistem primar neamortizat și un absorbitor cu amortizare vâscoasă (fig. 3.38, a). Un astfel de sistem se obține prin eliminarea amortizorului c_1 din sistemul prezentat în fig. 3.31.

Dacă se anulează coeficientul de amortizare c_1 , și se elimină forța f_2 , ecuațiile (3.136) pot fi rescrise sub forma

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= f_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2 (x_1 - x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.159)$$

În regim staționar, cu forță (de amplitudine constantă) și răspuns armonic

$$f_1 = F_0 e^{i\omega t}, \quad x_1 = \tilde{X}_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = \tilde{X}_2 e^{i\omega t}, \quad (3.160)$$

ecuațiile (3.159) devin

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 + i\omega c_2) \tilde{X}_1 - (i\omega c_2 + k_2) \tilde{X}_2 &= F_0, \\ -(i\omega c_2 + k_2) \tilde{X}_1 + (k_2 - m_2 \omega^2 + i\omega c_2) \tilde{X}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Amplitudinea vibrațiilor sistemului primar $X_1 = |\tilde{X}_1|$ poate fi exprimată sub forma

$$\frac{X_1}{x_{st}} = \sqrt{\frac{A^2 \zeta_2^2 + B^2}{C^2 \zeta_2^2 + D^2}} \quad (3.162)$$

unde

$$\begin{aligned} x_{st} &= F_0/k_1, \quad A = 2\mu\psi\theta, \quad B = \mu(\psi^2 - \theta^2), \quad C = 2\mu\psi\theta(1 - \theta^2 - \mu\theta^2), \\ D &= \mu(\psi^2 - \theta^2)(1 - \theta^2) - \mu^2\psi^2\theta^2, \quad \zeta_2 = c_2/2\omega_2 m_2, \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\mu = m_2/m_1, \quad \theta = \omega/\omega_1, \quad \psi = \omega_2/\omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}.$$

Curbele de variație ale raportului X_1/x_{st} în funcție de pulsația adimensională θ sunt prezentate în fig. 3.39, pentru valori date μ și ψ , și câteva valori ale raportului de amortizare ζ_2 . Absorbitorul reduce amplitudinea vibrațiilor sistemului primar de la valori infinite la o valoare finită mică, la $\theta = 1$.

Când $\zeta_2 = 0$, $X_1/x_{st} = B/D$. Când $\zeta_2 = \infty$, $X_1/x_{st} = A/C$. Curbele de răspuns trasate pentru cele două valori limită ale amortizării se intersectează în punctele R și S . Toate curbele de răspuns ale masei primare în sistemul cu absorbitor, trasate pentru diferite valori ζ_2 , trec prin aceste două puncte, numite “punctele fixe”.

Variind raportul pulsațiilor ψ , ordonatele celor două puncte cresc sau scad. Cazul cel mai favorabil, în care se obține valoarea minimă a răspunsului dinamic maxim pe întregul domeniu de pulsații, se poate obține dacă sunt satisfăcute următoarele două condiții (J. Ormondroyd și J. P. den Hartog, 1928):

a) Cele două puncte R și S să aibă ordonate egale. Aceasta se realizează dacă (E. Hahnkamm, 1932) raportul între pulsația proprie a absorbitorului și cea a sistemului primar este

$$\psi_{opt} = \frac{1}{1 + \mu}. \quad (3.164)$$

b) Pantele curbelor de răspuns în punctele R și S să fie zero, deci cele două puncte să devină două maxime în curba de răspuns.

Din păcate, pentru o valoare dată a raportului pulsațiilor ψ , nu pot exista două maxime de ordonate egale. Totuși, dacă panta în unul din puncte este zero, panta în celălalt punct este foarte apropiată de zero. Aceasta se obține atunci când răspunsul (deplasarea) sistemului primar este

$$(X_1/x_{st})_{opt} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}. \quad (3.165)$$

Pulsațiile adimensionale la care apar cele două vârfuri (abscisele punctelor fixe) au expresiile

$$\theta^2 = \frac{1 \pm \sqrt{2/(2+\mu)}}{1+\mu}. \quad (3.166)$$

Raportul pulsațiilor θ la care apare minimumul dintre cele două vârfuri este egal cu media aritmetică a valorilor de mai sus $\sqrt{1/(1+\mu)} = \psi^{1/2}$. Acesta este deci raportul pulsațiilor la care se acordează absorbitorul.

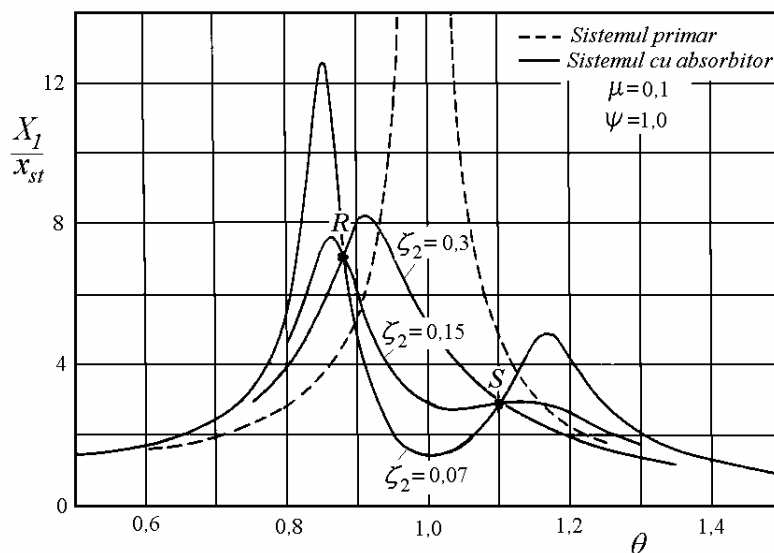


Fig. 3.39

Coeficientul de amortizare optim care rezultă din respectarea celor două condiții se poate obține derivând relația (3.162) în raport cu θ și egalând cu zero pentru fiecare punct de intersecție, rezultând două valori $\zeta_2 \psi = c_2/2m_2\omega_1$.

Diferența între aceste valori crește atunci când raportul μ (între masa absorbitorului și masa sistemului primar) crește. Se obișnuiește să se aleagă media aritmetică a acestor valori (J. E. Broch, 1946)

$$c_2/2m_2\omega_1 = \sqrt{3\mu/8(1+\mu)^3},$$

sau

$$\zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}. \quad (3.167)$$

În plus, deplasarea relativă între masa principală și cea a absorbitorului

$$|X_1 - X_2| = \sqrt{\frac{X_1 F}{2\mu k_1 \theta (c_2/2m_2\omega_1)}} \quad (3.168)$$

trebuie să fie relativ mică, pentru a evita ruperea prin oboseală a arcului absorbitorului.

Teoria prezentată, strict valabilă dacă sistemul primar este neamortizat, poate fi extinsă la sisteme slab amortizate.

Dacă se minimizează viteza masei sistemului primar (în locul deplasării) acționat de o forță armonică de amplitudine constantă, atunci parametrii optimi ai absorbitorului dinamic au valorile (V. H. Neubert, 1964)

$$\psi_{opt} = \frac{\sqrt{1+\mu/2}}{1+\mu}, \quad \zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu(1+\mu+5\mu^2/24)}{8(1+\mu)(1+\mu/2)^2}}, \quad (3.169)$$

$$\left(\frac{k_1\dot{X}_1}{F_0\omega}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{\frac{1+\mu/2}{1+\mu}}. \quad (3.170)$$

Dacă asupra masei sistemului primar acționează o forță armonică cu amplitudinea proporțională cu pătratul pulsației $m_0 r \omega^2$, atunci parametrii optimi ai absorbitorului dinamic au valorile (G. B. Warburton și E. O. Ayorinde, 1980)

$$\psi_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}, \quad \zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu/2)}}, \quad (3.171)$$

$$\left(\frac{m_1 X_1}{m_0 r}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{2+\mu}{\mu(1+\mu)}}. \quad (3.172)$$

3.6.5.2 Sistemul primar acționat la bază cu o accelerație armonică

Dacă suportul sistemului primar vibrează cu o accelerație armonică de amplitudine constantă \ddot{X}_0 și se minimizează accelerația masei sistemului primar, atunci parametrii optimi ai absorbitorului dinamic au aceleași valori (3.164), (3.165) și (3.167) ca în problema clasică (F. M. Sauer și C. F. Garland, 1949).

Dacă însă se minimizează deplasarea masei m_1 , atunci (G. B. Warburton, 1982)

$$\psi_{opt} = \frac{\sqrt{1 - \mu/2 + \sqrt{1 - 3\mu - (7/4)\mu^2}}}{2(1 + \mu)^2}, \quad (3.173)$$

$$\zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu(1 - 3\mu + 1,5\mu^2 - 2,833\mu^3)}{8(1 - 3,5\mu - 2\mu^2 - 0,5\mu^3)}}, \quad (3.174)$$

$$\left(\frac{\omega^2 X_1}{\ddot{X}_0}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}(1 + 2\mu + 2,125\mu^2 + 3,375\mu^3 + \dots). \quad (3.175)$$

Pentru ca ψ_{opt} să fie real, raportul maselor $\mu < 2/7$. Expresiile (3.174) și (3.175) s-au obținut prin dezvoltări în serie care asigură o precizie de 0,1% pentru $\mu \leq 0,1$.

3.6.5.3 Amortizorul sistemului secundar atașat de un reper fix

În fig. 3.38, *b* se prezintă o variantă a absorbitorului dinamic amortizat, în care amortizorul nu este atașat de sistemul primar ci de un reper fix.

Amplitudinea vibrațiilor sistemului primar este dată de expresia (3.162) unde A , B și D sunt date de (3.163) iar $C = 2\psi\theta(1 - \theta^2 + \mu\psi^2)$. Aplicând metoda optimizării bazată pe teoria punctelor fixe (M. Z. Rai, 2001), se obține condiția de acordare optimă

$$\psi_{opt} = \sqrt{\frac{1}{1 - \mu}} \quad (3.176)$$

și amortizarea optimă

$$\zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu/2)}}. \quad (3.177)$$

În aceste condiții, răspunsul (deplasarea) sistemului primar maxim este

$$\left(\frac{X_1}{x_{st}}\right)_{opt} = (1-\mu)\sqrt{\frac{2}{\mu}}. \quad (3.178)$$

Comparând expresiile (3.165) și (3.178) se observă că, pentru același raport al maselor μ , din relația (3.178) rezultă un nivel al vibrațiilor masei principale mai mic decât din relația (3.165). Deci, fără a crește masa adițională, nivelul vibrațiilor masei m_1 poate fi redus mai eficient legând amortizorul la un punct fix.

3.6.5.4 Aplicații ale absorbitorilor dinamici de vibrații

Relațiile obținute pentru parametrii absorbitorului optim pot fi utilizate și atunci când sistemul principal este un corp elastic, cu condiția ca acesta să aibă pulsații proprii bine separate, amortizare relativ mică și să se utilizeze în calcule masa efectivă a acestuia. Sistemul real este înlocuit cu un sistem echivalent cu un grad de libertate. Masa distribuită este concentrată în punctul de atașare a absorbitorului, în care se poate calcula rigiditatea echivalentă a sistemului.

Absoritorul dinamic a fost inventat de H. Frahm în 1909 și patentat în 1911.

La conductoarele electrice aeriene ale liniilor de înaltă tensiune apar vibrații transversale cu frecvențe între 5 și 50 Hz și amplitudini de ordinul diametrului conductorului, produse de curenți de aer cu viteze între 1 și 8 m/s. Problema a fost studiată prima dată în 1925 la linia de 220 kV dintre Big Creek și Los Angeles, pentru care G. H. Stockbridge a proiectat un absorbitor dinamic cu două greutateți din beton dispuse la capetele unei tije din oțel montat sub conductorul electric în punctul de amplitudine maximă a vibrațiilor. În prezent, *absoritorul Stockbridge* simetric se construiește în soluția Monroe-Templin (fig. 3.40).

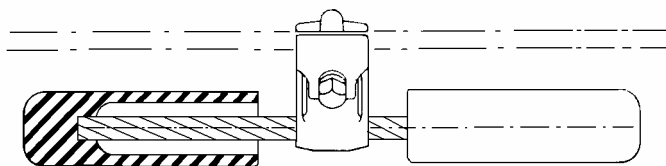


Fig. 3.40

Acesta constă dintr-un cablu toronat (care are amortizare, datorită frecării între fire) cu două greutateți (metalice cilindrice) la capete, fixat cu o bridă centrală sub conductorul electric, de obicei în apropierea stâlpului de susținere.

Absoritorul este un element reactiv, care absoarbe energia vibrațiilor liniei aeriene, realizând o cvasi-antirezonanță, deci un punct aproape fix în apropierea stâlpului, limitând astfel solicitările mari din punctul de prindere de

stâlp al conductorului electric. Există o gamă largă de absorbitori Stockbridge, pentru conductoare cu diametre până la 75 mm și deschideri până la 670 m.

De obicei, absorbitorul este acordat pe frecvențele forțelor transversale armonice produse de desprinderea vârtejurilor alternante de tip Kármán. Acestea se calculează pe baza vitezei vântului, diametrului conductorului și numărului Strouhal al curgerii.

Sub acțiunea vântului și cutremurelor, clădirile înalte au vibrații laterale și vibrații torsionale. Pentru limitarea acestora, se utilizează absorbitori dinamici amplasați la un etaj superior, conform schemei din fig. 3.41.

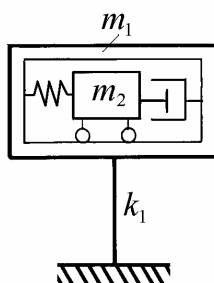


Fig. 3.41

Prima aplicație de acest fel s-a utilizat la clădirea John Hancock Tower din Boston, Massachusetts, în urma plângerilor locatarilor deranjați de vibrațiile clădirii produse de vânt (1976). La extremitățile etajului superior au fost instalate două mase de câte 300 tone (plumb în cutii de oțel) acționate hidraulic, sistemul secundar având perioade proprii până la 7 secunde și amplitudini până la 1,8 m. Când clădirea se “clatină” sub acțiunea vântului, greutatea tind să rămână fixe în spațiu, permițând podelei să alunece sub ele, arcurile și amortizoarele acționând asupra structurii din oțel, reducând vibrațiile.

A doua aplicație a fost la Citycorp Center din Manhattan (1977), absorbtorul având o greutate din beton de 360 tone, acționată hidraulic pe două direcții perpendiculare între ele. Sistemul hidraulic care realizează suspensia este pornit automat când vibrațiile produse de vânt depășesc un anumit nivel. Oscilațiile masei absorbtorului dinamic preiau din energia vibrațiilor clădirii, realizând o reducere până la 50% a amplitudinii acestora. Soluția este mai ieftină decât rigidizarea structurii.

Turnul Taipei 101 are la etajul 88 un absorbtor dinamic cu o masă sferică de 700 tone suspendată pendular pe cabluri. Hotelul Burj al-Arab din Dubai (321 m) are opt absorbitori dinamici orizontali montați la înălțimea de 280 m în brațele exterioare din oțel și trei absorbitori plasați în vârful catargului antenei. Absorbitori dinamici sunt montați și în antenele celor două clădiri Emirates Towers din Dubai și în turnul televiziunii din Berlin.

Absorbitorii dinamici pot fi utilizați pentru atenuarea vibrațiilor blocurilor de fundații ale compresoarelor cu piston. O soluție care utilizează absorbitori cu mase din fontă, montate pe arcuri din oțel în consolă, este prezentată în fig. 3.42 (Allaway și Grootenhuis, 1965).

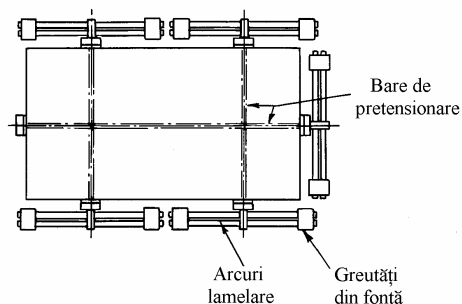


Fig. 3.42

În fig. 3.43 se prezintă absorbitori utilizați la mașini electrice (J. Ormondroyd și J. P. den Hartog, 1928). Pe pedestalul lagărului exterior al unui turbogenerator de 300 MW s-au înregistrat vibrații axiale de $137 \mu\text{m}$ la turația de 1800 rot/min. S-au montat doi absorbitori constând dintr-o bară în consolă, de lungime 0,5m și secțiune transversală $200 \times 67 \text{ mm}$, și o greutate de 110 N cu poziție reglabilă pe verticală, calculată să aibă o frecvență proprie de 30 Hz. Amplitudinea vibrațiilor a fost redusă la $48 \mu\text{m}$.

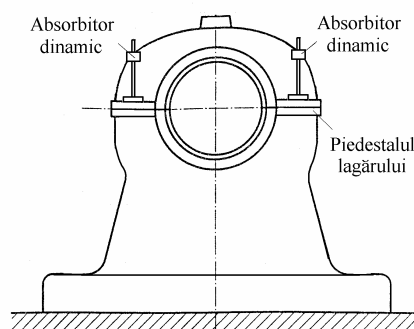


Fig. 3.43

Podurile pentru pietoni și pasarelele pot vibra sub acțiunea vântului sau a forțelor produse de trecerea pietonilor. Sunt cunoscute problemele ridicate de vibrațiile laterale ale podului Millenium Bridge din Londra (cu amplitudini până la 70 mm la frecvența de 0,95 Hz) sub care au fost montați 52 de absorbitori de vibrații. Aceeași problemă a apărut la podurile din Auckland, Birmingham și Chester, cu frecvențe laterale de ordinul a 0,7 Hz și în Paris, la podul peste Sena

dintre grădinile Tuileries și Quay d'Orsay și recent la pasarella Simone de Beauvoir. În fig. 3.44 se arată un absorbitor pentru vibrații verticale, cu o masă de 710 kg și amortizare cu aer (V. A. L. Chasteau, 1973).

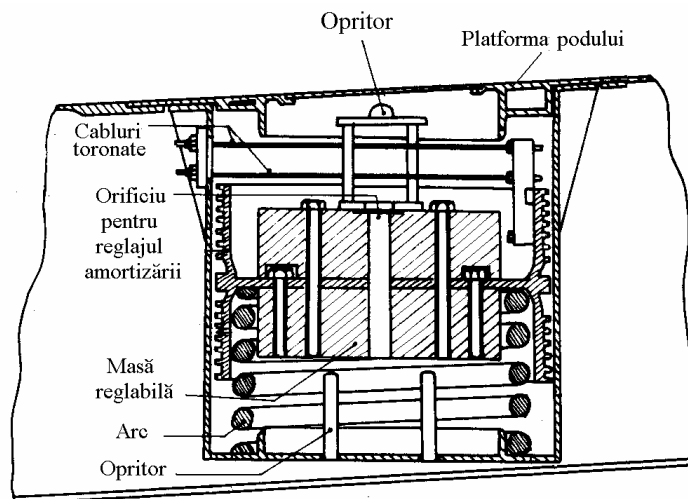


Fig. 3.44

O aplicație la o mașină de tuns electrică este prezentată în fig. 3.45. Mișcarea de dute-vino a lamei tăietoare produce vibrațiile mânerului care sunt atenuate de amortizorul dinamic realizat ca o bară în consolă cu o masă în capăt, fixată de carcasa mașinii (I. O. Miner, 1931).

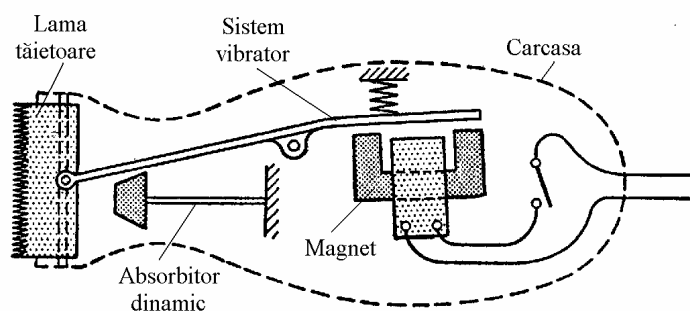


Fig. 3.45

În fig. 3.46 se arată schița unei bare de strunjit interior prevăzută cu un absorbitor dinamic. Masa absorbitorului (din plumb) este cilindrică. Capetele de diametru mai mic sunt rezemate pe două inele din cauciuc. Acestea pot fi comprimate axial cu o forță reglabilă, modificându-se astfel rigiditatea și coeficientul de amortizare ale absorbitorului, pentru acordarea acestuia.

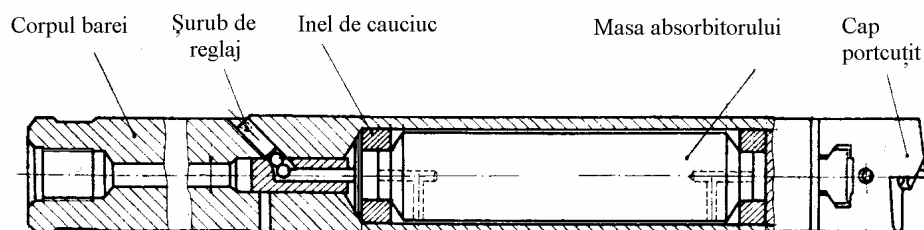


Fig. 3.46

La barele de alezat și la cuțitele de strung se pot utiliza și absorbitori dinamici cu acțiune prin impact. În fig. 3.47 se arată absorbitorul cu impact pentru cuțite de strung pentru degroșare proiectat de D. J. Rijkov (1953).

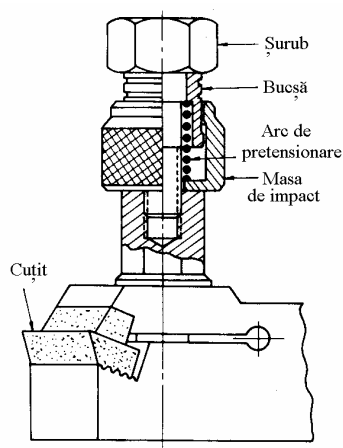


Fig. 3.47

De menționat că absorbitorul Lanchester a fost aplicat la bare de găurit (R. S. Hahn, 1951) iar absorbitori amortizați, cu elemente deformabile din elastomeri sau materiale plastice (având atât elasticitate cât și amortizare), sunt frecvent utilizați la mașini unelte

3.6.6 Amortizarea vâscoasă neproportională

Se consideră sistemul din fig. 3.30, *a* cu amortizare vâscoasă neproportională. Ecuația vibrațiilor libere (3.121, *a*) este

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}, \quad (3.179)$$

unde matricea $[c]$ nu este proporțională nici cu matricea $[m]$ nici cu $[k]$.

Pentru simplificarea calculelor, ecuația de ordinul doi (3.179) este transformată într-o ecuație de ordinul întâi în spațiul stărilor, introducând o ecuație auxiliară

$$[m] \{\dot{x}\} - [m] \{\dot{x}\} = \{0\}. \quad (3.180)$$

Combinând ecuațiile (3.179) și (3.180) rezultă

$$\begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & -[m] \\ [k] & [c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.181)$$

sau

$$[A] \{\dot{q}\} + [B] \{q\} = \{0\}, \quad (3.182)$$

unde matricile $[A]$ and $[B]$, de dimensiuni 4×4 , sunt reale

$$[A] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [0] & -[m] \\ [k] & [c] \end{bmatrix}.$$

Înlocuind o soluție de forma $\{q\} = \{\Phi\} e^{st}$, și corespunzător $\{x\} = \{u\} e^{st}$, ecuația (3.182) devine

$$(s[A] + [B]) \{\Phi\} = \{0\}. \quad (3.183)$$

Există patru valori proprii s_r , soluții ale ecuației

$$\det(s[A] + [B]) = 0, \quad (3.184)$$

și patru vectori proprii $\{\Phi\}_r$, care satisfac problema generalizată de valori proprii

$$[B] \{\Phi\}_r = -s_r [A] \{\Phi\}_r. \quad (r = 1, \dots, 4) \quad (3.185)$$

Ecuația (3.185) se poate scrie sub forma

$$-[A]^{-1}[B] \{\Phi\}_r = s_r \{\Phi\}_r, \quad (r = 1, \dots, 4) \quad (3.186)$$

unde

$$-[A]^{-1}[B] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c] \end{bmatrix}. \quad (3.187)$$

Ecuația (3.181) devine

$$\left(\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c] \end{bmatrix} - s \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ s\{u\} \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (3.188)$$

La sisteme cu 2 g.d.l. amortizate subcritic, ecuația (3.188) are două perechi de rădăcini complexe conjugate

$$s_{1,2} = -\sigma_1 \pm i\omega_{d1}, \quad s_{3,4} = -\sigma_2 \pm i\omega_{d2}, \quad (3.189)$$

unde părțile imaginare, ω_{d1} și ω_{d2} , sunt *pulsațiile proprii amortizate* iar părțile reale, σ_1 și σ_2 , sunt *factori de amortizare* (constante de atenuare). Vectorii proprii $\{\Phi\}_r$ sunt complecși conjugați.

Între parametrii de mai sus și *valorile absolute ale pulsațiilor proprii și rapoartele de amortizare* se stabilesc relațiile

$$\omega_r = \sqrt{\omega_{dr}^2 + \sigma_r^2}, \quad \zeta_r = \frac{\sigma_r}{\omega_r}, \quad r = 1, 2 \quad (3.190)$$

În general, la modurile de vibrație amortizate supracritic, valorile proprii reale se pot scrie

$$s_r, s_{r+1} = -\sigma_r \mp \tau_r, \quad (3.191)$$

iar relațiile (3.190) devin

$$\omega_r = \sqrt{\sigma_r^2 - \tau_r^2}, \quad \zeta_r = \frac{\sigma_r}{\omega_r}. \quad (3.192)$$

Mișcarea într-un mod amortizat supracritic este aperiodică. În acest caz, nu există un vârf de rezonanță în diagrama amplitudine-pulsație sau o buclă în diagrama Nyquist chiar pentru pulsații proprii relativ depărtate.

Pentru sisteme amortizate subcritic, din ecuația (3.188) se obțin două perechi de vectori complecși conjugați, a căror jumătate superioară definește forma modală. Diferența de fază între mișcările în gradele de libertate într-un mod de vibrație face ca amplitudinea deplasării maxime a maselor să se înregistreze în momente diferite în timp. Mișcarea într-un mod de vibrație complex nu mai este sincronă, și nu are caracterul unei unde staționare, cu noduri și ventre fixe, ca la sistemele cu amortizare proporțională. Ea are proprietățile unei unde progresive, cu noduri și ventre care se deplasează ciclic, configurația repetându-se la fiecare ciclu de vibrație,

Exemplul 3.14

Sistemul din fig. 3.31 are $m_1 = 100 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 9,9 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, $k_2 = 0,1 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, $c_1 = c_2 = 125 \text{ Ns/m}$. Să se calculeze parametrii modali și să se traseze diagramele Nyquist ale receptanțelor complexe.

Rezolvare. Matricile de masă, de rigiditate și de amortizare sunt

$$[m] = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [k] = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 100 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, [c] = \begin{bmatrix} 250 & -125 \\ -125 & 125 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii cu parte imaginară pozitivă sunt

$$\lambda_1 = -4,785 + i \cdot 312,659, \quad \lambda_2 = -58,965 + i \cdot 312,685.$$

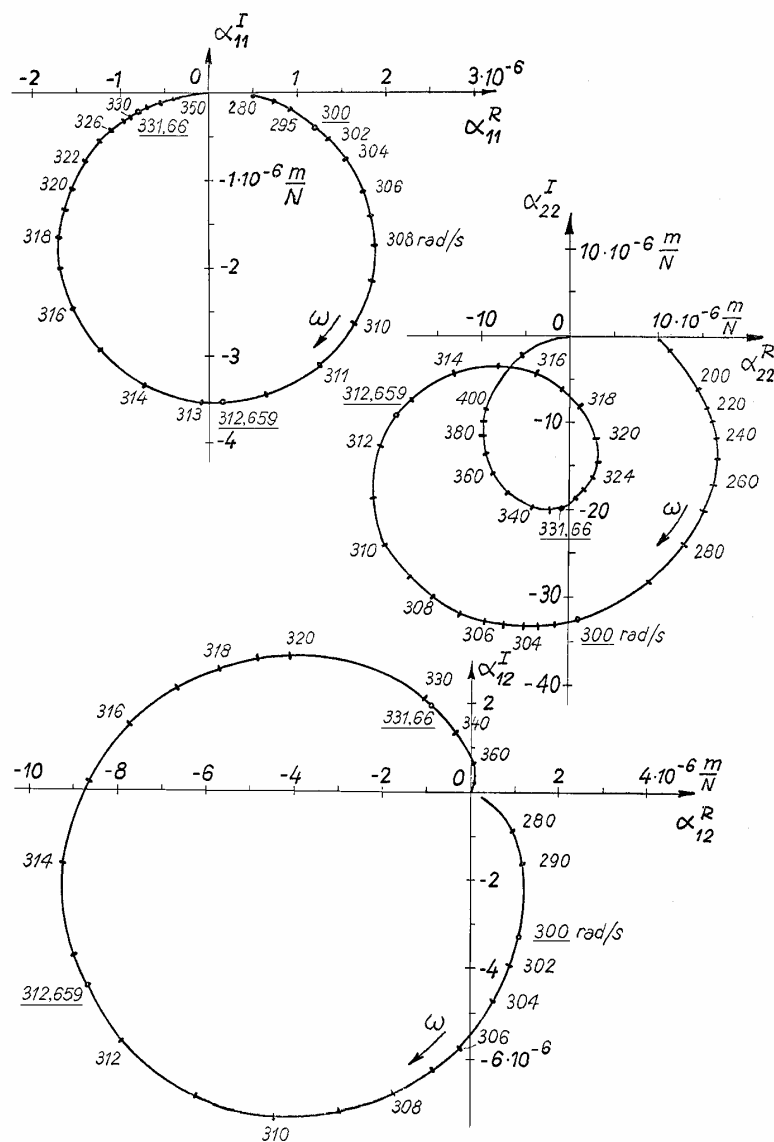


Fig. 3.48

Vectorii proprii corespunzători sunt

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,207 - i \cdot 2,698 \end{Bmatrix}, \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -8,865 - i \cdot 35,222 \end{Bmatrix}.$$

Pulsațiile proprii amortizate sunt $\omega_{d1} = 312,66$ rad/s și $\omega_{d2} = 312,68$ rad/s. Valorile absolute ale pulsațiilor proprii sunt $\omega_1 = \sqrt{\omega_{d1}^2 + \sigma_1^2} = 312,70$ rad/s, $\omega_2 = \sqrt{\omega_{d2}^2 + \sigma_2^2} = 318,19$ rad/s. Rapoartele de amortizare modale sunt $\zeta_1 = \sigma_1/\omega_1 = 0,015$ și $\zeta_2 = \sigma_2/\omega_2 = 0,185$.

Pulsațiile proprii neamortizate ale sistemului conservativ asociat sunt $\omega_{01} = 300$ rad/s și $\omega_{02} = 100\sqrt{11} = 331,66$ rad/s, fiind diferite de valorile absolute ale valorilor proprii ale sistemului cu amortizare neproportională. În acest caz, diferența între pulsațiile proprii amortizate este 0,026 rad/s, deci 0,0041 Hz, în timp ce pulsațiile proprii neamortizate diferă cu 5,039 Hz. Cuplajul prin amortizare apropie relativ pulsațiile proprii, ceea ce complică determinarea lor experimentală.

Diagramele Nyquist ale receptanțelor $\alpha_{ij} = x_i/f_j$, $i, j = 1, 2$, sunt prezentate în fig. 3.48 cu pulsația excitatoare marcată de-a lungul curbelor. Forma neobișnuită a diagramelor receptanțelor directe, fără bucle distincte, este produsă de apropierea relativă a pulsațiilor proprii și valoarea relativ mare a amortizării în modul al doilea de vibrație.

Exemplul 3.15

Să se calculeze parametrii modali ai sistemului din fig. 3.31, utilizând valorile parametrilor date în Tabelul 3.1 pentru următoarele patru cazuri: *cazul I*: sistem slab amortizat, cu pulsații proprii relativ depărtate; *cazul II*: sistem slab amortizat, cu pulsații proprii relativ apropiate; *cazul III*: sistem puternic amortizat, cu pulsații proprii relativ depărtate; *cazul IV*: sistem puternic amortizat, cu pulsații proprii relativ apropiate.

Tabelul 3.1

Cazul		I	II	III	IV
$M_1 = M_2$	kg	0,0259	0,0259	0,0259	0,0259
$K_1 = K_3$	N/m	100	100	100	100
K_2	N/m	50	1	50	1
C_1	Ns/m	0,3	0,3	3	3
C_2	Ns/m	0,2	0,2	2	2
C_3	Ns/m	0,1	0,1	1	1

Să se traseze apoi diagramele Nyquist ale receptanțelor complexe pentru cele patru sisteme.

Rezolvare. Pulsățiile proprii neamortizate au expresiile

$$\omega_{01}^2 = \frac{k_3}{m_2}, \quad \omega_{02}^2 = \omega_{01}^2 \left(1 + 2 \frac{k_2}{k_3} \right).$$

Vectorii modali neamortizați sunt aceiași în toate cazurile

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{a\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

Matricile maselor modale, rigidităților modale și amortizărilor modale, calculate cu ajutorul matricii modale construite cu vectorii de mai sus, sunt

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m_1 & 0 \\ 0 & 2m_2 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & 0 \\ 0 & k_1 + k_3 + 4k_2 \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & c_1 - c_3 \\ c_1 - c_3 & c_1 + c_3 + 4c_2 \end{bmatrix}.$$

Dacă $c_1 \neq c_3$, amortizarea este neproportională iar matricea de amortizare modală nu este proporțională cu matricile modale de masă și de rigiditate.

Valorile proprii sunt soluții ale ecuației algebrice de gradul patru

$$\begin{vmatrix} m_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2 & -c_2 s - k_2 \\ -c_2 s - k_2 & m_2 s^2 + (c_2 + c_3)s + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La moduri de vibrație amortizate subcritic, valorile proprii complexe pot fi scrise sub forma (3.179), în timp ce pentru moduri amortizate supracritic valorile proprii reale pot fi scrise sub forma (3.181).

Valorile numerice ale parametrilor modali sunt date în Tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

Cazul		I		II		III		IV	
ω_{01}	ω_{02}	62,13	87,86	62,13	62,75	62,13	87,86	62,13	62,75
ω_1	ω_2	62,24	87,69	62,16	62,71	64,28	84,92	62,16	62,71
ζ_1	ζ_2	0,062	0,132	0,055	0,192	0,540	1,409	0,547	1,919
ω_{d1}	ω_{d2}	62,13	86,93	62,07	61,55	54,09	-	52,01	-
σ_1	σ_2	3,845	11,594	3,406	12,033	34,734	-	34,044	-

Pulsațiile proprii neamortizate diferă de valorile absolute ale valorilor proprii ale sistemului cu amortizare neproporțională, $\omega_{0r} \neq \omega_r$. În cazul cuplajului prin amortizare, valorile absolute ale valorilor proprii, uneori denumite *pulsații de rezonanță*, sunt mai apropiate între ele decât pulsațiile proprii neamortizate corespunzătoare, în timp ce pulsațiile proprii amortizate pot avea ordinea inversată. Pentru primul mod de vibrație, $\omega_1 > \omega_{01}$, în timp ce pentru modul al doilea, $\omega_2 < \omega_{02}$, iar în cazul II, $\omega_{d2} < \omega_{d1}$.

Modul al doilea este amortizat supracritic în cazurile III și IV, având raportul de amortizare modal $\zeta_r > 1$. Într-adevăr, pentru valorile parametrilor fizici corespunzătoare sistemelor cu pulsații proprii neamortizate relativ depărtate, modul al doilea de vibrație devine amortizat supracritic la o valoare $c_3 \cong 0,749 \text{ Ns/m}$, în timp ce primul mod de vibrație devine amortizat supracritic pentru valori mai mari decât $c_3 \cong 1,89 \text{ Ns/m}$.

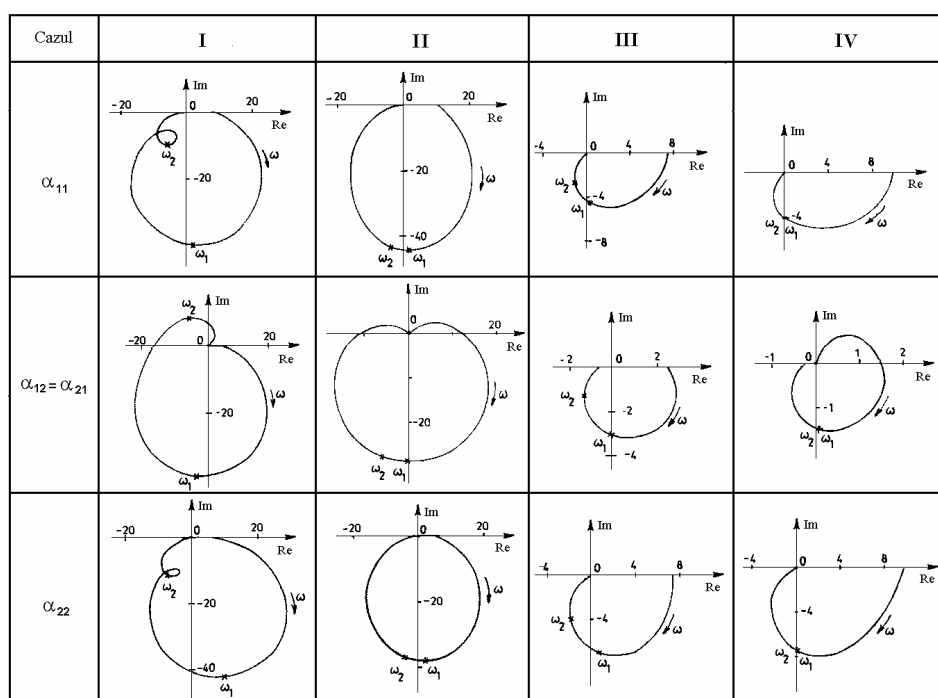


Fig. 3.49

Diagramele polare ale receptanțelor complexe sunt prezentate în fig. 3.49. Cu excepția cazului I, diagramele nu au două bucle, câte una pentru fiecare mod de vibrație, astfel că numărul gradelor de libertate nu poate fi stabilit prin simpla inspecție vizuală a diagramelor răspunsului în frecvență. În astfel de cazuri, localizarea rezonanței necesită metode adecvate, tratate în volumul 2.

Probleme

3.E1 La sistemul din fig. 3.1, cu $k_1 = 2k$, $k_2 = k$, $k_3 = 2k$, $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, se cer ecuațiile de mișcare și modurile proprii de vibrație.

Răspuns: $\omega_1 = 0,919\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1,776\sqrt{k/m}$, $\mu_1 = 0,464$, $\mu_2 = -6,464$.

3.E2 Să se determine amplitudinile vibrațiilor forțate ale sistemului din fig. 3.4, dacă $k_1 = 10^3$ N/m, $k_2 = 500$ N/m, $k_3 = 2 \cdot 10^3$ N/m, $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 10$ kg, $\hat{f}_1 = 100$ N, $\hat{f}_2 = 0$, $\omega = 15$ rad/s.

Răspuns: $X_1 = 0,16$ m, $X_2 = -0,32$ m.

3.E3 Să se determine amplitudinile vibrațiilor forțate ale sistemului din fig. 3.4, pentru $k = 10^3$ N/m, $m = 5$ kg, $\hat{f}_1 = 50$ N, $\hat{f}_2 = 100$ N, $\omega = 10$ rad/s.

Răspuns: $X_1 = -0,5$ m, $X_2 = -0,8$ m.

3.E4 Să se determine pulsațiile proprii și formele modale pentru vibrațiile torsionale ale sistemului din fig. 3.6. Rigiditățile arborilor sunt $K_1 = K$, $K_2 = 2K$, $K_3 = 3K$, iar momentele de inerție masice ale discurilor sunt $J_1 = 2J$, $J_2 = J$.

Răspuns: $\omega_1 = \sqrt{K/J}$, $\omega_2 = 2,345\sqrt{K/J}$, $\mu_1 = 0,5$, $\mu_2 = -4$.

3.E5 Utilizând următoarele valori numerice: $K_1 = 10^7$ Nm/rad, $K_2 = 10^7$ Nm/rad, $K_3 = 3 \cdot 10^7$ Nm/rad, $J_1 = 100$ kg m², $J_2 = 200$ kg m², $\hat{f}_1 = 100$ N, $\hat{f}_2 = 0$, $\omega = 15$ rad/s, să se determine amplitudinile vibrațiilor torsionale ale sistemului din fig. 3.6, dacă pe discul al doilea acționează un cuplu armonic de amplitudine $M_0 = 10^5$ N și pulsație $\omega = 300$ rad/s.

Răspuns: $\Theta_1 = 0,00735$ rad, $\Theta_2 = 0,00772$ rad.

3.E6 Să se calculeze pulsațiile proprii și formele modurilor proprii ale vibrațiilor de încovoiere pentru sistemul din fig. 3.15, în care $m_1 = 3m$, $m_2 = m/3$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ și $EI = \text{const.}$

Răspuns: $\omega_1 = 0,522\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_2 = 1,73\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\mu_1 = 6$,
 $\mu_2 = -1,5$.

3.E7 Să se determine modurile proprii ale vibrațiilor laterale ale sistemului prezentat în fig. 3.20, unde $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, $\ell_3 = \ell/2$ și $f = 0$.

Răspuns: $\omega_1 = 1,477\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_2 = 3,464\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\mu_1 = -1$,
 $\mu_2 = 2$.

3.E8 Să se calculeze pulsațiile proprii și formele modurilor proprii ale vibrațiilor de încovoiere ale barei de greutate neglijabilă din fig. 3.E8, pe care sunt montate două mase.

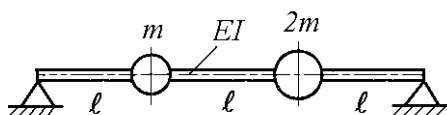


Fig. 3.E8

Răspuns: $\omega_1 = 0,891\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\omega_2 = 3,688\sqrt{EI/m\ell^3}$, $\mu_1 = 1,048$,
 $\mu_2 = -0,477$.

3.E9 Să se determine amplitudinile vibrațiilor maselor din fig. 3.E9, utilizând următoarele valori numerice: $EI/m\ell^3 = 800 \text{ sec}^{-2}$, $F_0\ell^3/EI = 2 \text{ mm}$ și $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

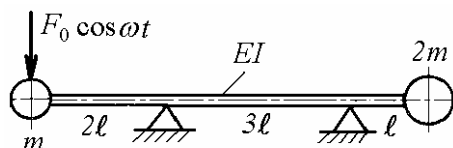


Fig. 3.E9

Răspuns: $Y_1 = 117,5 \text{ mm}$, $Y_2 = 25,04 \text{ mm}$.

3.E10 Să se scrie ecuațiile de mișcare ale sistemului din fig. 3.E10 utilizând drept coordonate deplasarea x a centrului de greutate și rotația θ față de

acest punct. Să calculeze pulsațiile proprii și să se traseze formele modurilor de vibrație, cu localizarea nodului în fiecare mod.

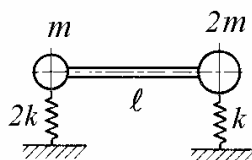


Fig. 3.E10

Răspuns: $\omega_1 = 0,707\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1,414\sqrt{k/m}$, $1/\mu_1 = 0,666\ell$,
 $1/\mu_2 = -0,333\ell$.

3.E11 Să se calculeze pulsațiile proprii și să se traseze formele modurilor proprii ale vibrațiilor cuplate de translație și rotație pentru bara rigidă din fig. 3.E11.

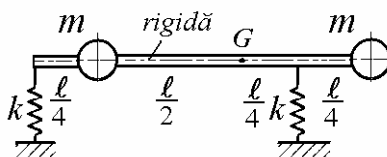


Fig. 3.E11

Răspuns: $\omega_1 = 0,78\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1,281\sqrt{k/m}$, $1/\mu_1 = 0,64\ell$, $1/\mu_2 = -0,39\ell$.

3.E12 Să se calculeze amplitudinile vibrațiilor forțate ale barei rigide din fig. 3.E12, utilizând următoarele valori numerice: $k = 10^3$ N/m, $m = 5$ kg, $F_0 = 50$ N, $\ell = 0,4$ m și $\omega = 10$ rad/s.

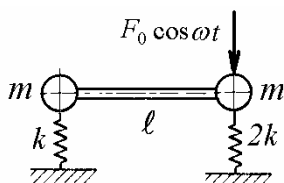


Fig. 3.E12

Răspuns: $A_x = 0,0165$ m, $A_\theta = 0,083$ rad.

3.E13 În tabelul alăturat se dau rezultatele unei încercări în regim armonic a unei structuri. Răspunsul a fost măsurat la o oarecare distanță de punctul de aplicație al forței excitatoare și este dat sub forma valorilor amplitudinii și unghiului de fază ale receptanței de transfer complexe. Se cere estimarea parametrilor modali: masele modale, rigiditățile modale, rapoartele de amortizare și coeficienții de amortizare vâscoasă modali.

Frecvența, Hz	Amplitudinea receptanței, 10^{-3} mm/N	Defazajul între răspuns și forță, grade
40	10	10
41	10,9	30
41,5	10,9	50
41,8	10,4	70
42	9,5	90
42,5	8,4	110
43,5	7,1	130
44	4,9	150
50	3,0	152
60	2,8	160
68	2,0	178
70	6,4	190
72	6,9	210
73	7,2	230
73,5	6,6	250
74	5,5	270
74,5	4,3	290
75	3,0	310
77	1,8	330

Răspuns: $\omega_1 = 263$ rad/s, $\zeta_1 = 0,0466$, $K_1 = 700$ N/m,
 $C_1 = 0,248$ Ns/m, $M_1 = 1,015 \cdot 10^{-2}$ kg, $\omega_2 = 462$ rad/s, $\zeta_2 = 0,0339$,
 $K_2 = 1800$ N/m, $C_2 = 0,264$ Ns/m, $M_2 = 0,84 \cdot 10^{-2}$ kg.

3.E14 Să se arate că dacă se minimizează *acclerația* masei sistemului primar (în locul deplasării) acționat de o forță armonică de amplitudine constantă, atunci parametrii optimi ai absorbitorului dinamic amortizat au valorile

$$\psi_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}, \quad \zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu/2)}}$$

$$\left(\frac{m_1 \ddot{X}_1}{F_0} \right)_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\mu(1+\mu)}}.$$

4.

SISTEME CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

Sistemele vibratoare cu două grade de libertate studiate în capitoul precedent reprezintă cazul cel mai simplu și o introducere în studiul sistemelor cu mai multe grade de libertate. Un sistem are n grade de libertate dacă, în orice moment, configurația sa poate fi reprezentată de n coordonate independente. De obicei, în spațiul configurațiilor, coordonatele sunt deplasări liniare sau unghiulare, dar pot fi și viteze sau accelerații.

Sistemele cu număr finit de grade de libertate sunt *sisteme discrete*. În practica inginerească, vibrațiile sistemelor continue sunt de obicei descrise cu un număr finit de coordonate. Fiecare element al unui sistem discret poate fi el însuși un sistem continuu, dar frecvențele proprii cele mai joase ale acestuia trebuie să fie mult mai mici decât cele ale sistemului discret idealizat.

Cea mai simplă metodă de discretizare conduce la *sisteme cu parametri concentrați*, constând din mase sau discuri rigide, arcuri și amortizoare. Proprietățile dinamice ale acestora sunt definite prin mărimi scalare. Elementele deformabile pot fi descrise prin matrici de rigiditate și de amortizare, care exprimă forțele la extremitățile elementului în funcție de deplasările sau vitezele relative ale extremităților.

Un alt procedeu de discretizare este *metoda elementelor finite*. Aceasta poate fi considerată o metodă Rayleigh-Ritz, în care soluția unei probleme diferențiale de valori proprii, pentru care nu se cunoaște forma (închisă) exactă, este aproximată printr-o serie finită de *funcții de formă* înmulțite cu coeficienți nedeterminați. În metoda elementelor finite, funcțiile de formă sunt polinoame de grad mic, definite local, iar coeficienții sunt *deplasări nodale* determinate astfel încât să minimizeze câtul lui Rayleigh pentru întregul sistem. Pentru fiecare tip de element finit se definesc matricile elementului care sunt apoi asamblate în matricile globale de masă, de rigiditate și de amortizare.

Cu ajutorul matricilor globale se scriu ecuațiile diferențiale de mișcare. Căutând soluții armonice sincrone, ecuațiile de mișcare sunt transformate într-un sistem algebric liniar și omogen, echivalent cu o *problemă de valori proprii*.

Valorile proprii dau *frecvențele proprii* iar vectorii proprii dau *forma modurilor proprii* de vibrație. Frecvențele proprii mai pot fi obținute prin minimizarea câtului lui Rayleigh.

Răspunsul dinamic al unui sistem discret poate fi descris de ecuații diferențiale ordinare simultane. Prin alegerea unui set convenabil de coordonate, numite *coordonate modale* sau *principale*, ecuațiile de mișcare pot fi decuplate și rezolvate independent. Coordonatele modale reprezintă combinații liniare ale deplasărilor reale. Invers, mișcarea în spațiul configurațiilor poate fi privită ca o suprapunere de vibrații în *modurile naturale (proprii)* de vibrație, definite de coordonatele modale. Mișcarea într-un mod propriu de vibrație al unui sistem neamortizat este sincronă și armonică în toate coordonatele sistemului.

Sistemele cu un număr finit de grade de libertate vibrează simultan în cele câteva moduri naturale, al căror număr este egal cu numărul gradelor de libertate. Pentru a vibra într-un singur mod natural sunt necesare anumite combinații particulare ale condițiilor inițiale ale mișcării sau ale forțelor exterioare aplicate sistemului. În cazul vibrațiilor amortizate, vibrația liberă este dominată doar de câteva moduri cu frecvențe joase, uneori doar de modul fundamental de vibrație, în timp ce vibrația forțată poate fi descrisă de o sumă trunchiată de moduri naturale cu rezonanțe în domeniul frecvențelor de interes, la care se mai adaugă câțiva termeni reziduali datorită modurilor cu frecvențe inferioare sau superioare domeniului de lucru.

Între *sistemele discrete de ordin mic* analizate în acest capitol și sistemele discrete de ordin mare, tratate într-un alt capitol (volumul 2), nu există diferențe esențiale, cu excepția faptului că rezolvarea problemei de valori proprii a sistemelor mari necesită metode de calcul mai eficiente.

4.1 Sisteme cu mase concentrate

Sistemele vibratoare formate din elemente unidimensionale, de tipul barelor, arborilor sau grinzilor, pot fi modelate prin sisteme simple constând din mase concentrate conectate prin elemente elastice cu masă proprie neglijabilă. Masa distribuită a elementelor elastice este concentrată în puncte alese arbitrar, de obicei echidistante, indiferent de variația amplitudinii vibrației în lungul elementului.

4.1.1 Bare cu mase concentrate

Pe barele cu mase concentrate pot fi atașate fie mase punctuale, care au deplasări transversale de translație (liniare), fie discuri rigide, care au grade de libertate de translație și de rotație (liniare și unghiulare).

4.1.1.1 Deplasări liniare

În fig. 4.1 se prezintă două moduri de discretizare a masei unui element de grindă de secțiune constantă. Modelul lui Duncan (fig. 4.1, b) are masa totală concentrată în centrul de greutate. Modelul lui Rayleigh (fig. 4.1, c) are câte o jumătate din masa totală concentrată la fiecare extremitate. S-a notat $m_0 = \rho A$ masa pe unitatea de lungime, unde ρ este densitatea materialului și A este aria secțiunii transversale.

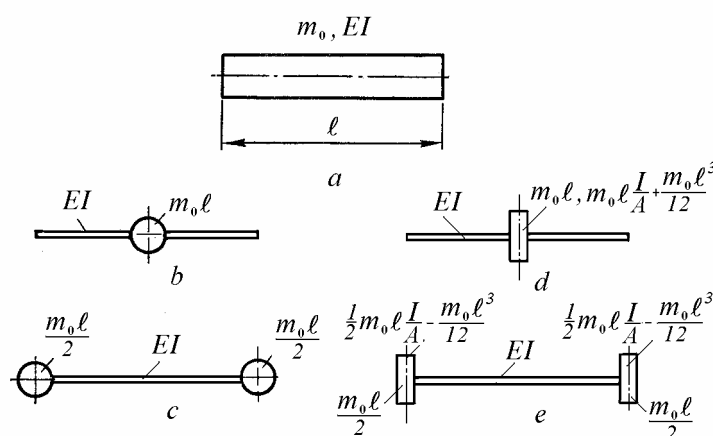


Fig. 4.1

Comparând cele două modele se observă că în modelul lui Duncan se neglijează inerția la rotație față de mijlocul elementului, în timp ce în modelul lui Rayleigh momentul de inerție față de mijloc este $2 \frac{m_0 l}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 \neq 0$. Din acest

motiv, prin concentrarea masei proprii folosind modelul lui Duncan se obțin în general frecvențe proprii de valori mai mari, în timp ce cu modelul lui Rayleigh se obțin frecvențe proprii mai mici. Diferența valorilor frecvențelor calculate cu cele două modele scade cu creșterea numărului elementelor.

Modelul lui Rayleigh prezintă avantaje în cazul barelor cu secțiune variabilă în trepte, când modulul de rigiditate la încovoiere EI variază la capetele elementelor, astfel că între mase modelul cu mase concentrate are porțiuni de secțiune constantă.

Discrepanța valorilor frecvențelor proprii calculate cu modelul lui Rayleigh poate fi ilustrată prin două exemple.

Dacă grinda simplu rezemată din fig. 4.2, a este împărțită în două segmente (fig. 4.2, b), raportul între pulsația proprie aproximativă și cea adevărată (5.14), calculată pentru grinda cu masă uniform distribuită, este $\omega_1/\omega_{10} = 0,995$.

Dacă grinda este împărțită în patru segmente (fig. 4.2, *c*), sistemul cu trei grade libertate are pulsații proprii $\omega_1/\omega_{10} = 0,98$, $\omega_2/\omega_{20} = 0,995$ și $\omega_3/\omega_{30} = 0,995$.

La grinda în consolă din fig. 4.3, *a* aproximația este mai slabă. La modelul cu un segment (fig. 4.3, *b*), raportul între pulsația proprie și valoarea adevărată (5.16) este $\omega_1/\omega_{10} = 0,7$. Dacă grinda este împărțită în două segmente (fig. 4.3, *c*), raportul primelor pulsații proprii este $\omega_1/\omega_{10} = 0,9$. Dacă grinda este împărțită în trei segmente (fig. 4.2, *d*), raportul primelor pulsații proprii este $\omega_1/\omega_{10} = 0,95$.

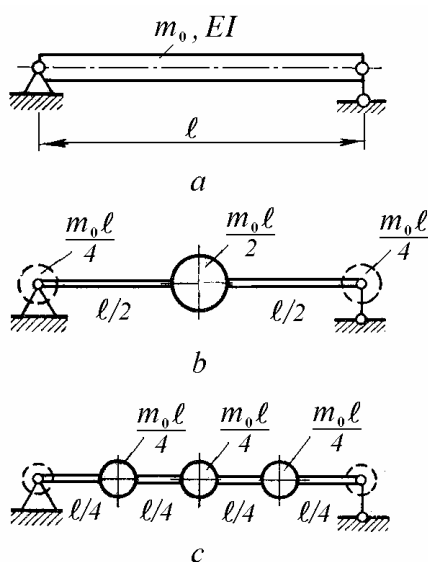


Fig. 4.2

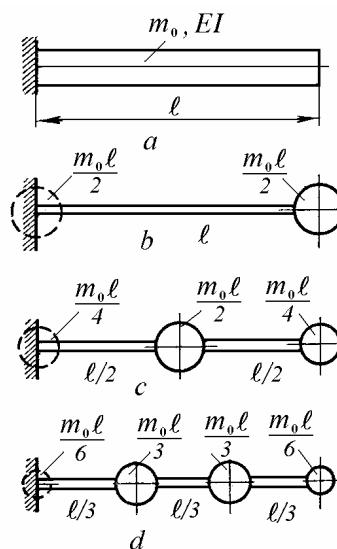


Fig. 4.3

4.1.1.2 Deplasări liniare și rotiri

O extensie a modelului lui Duncan este prezentată în fig. 4.1, *d*, unde masa și momentul de inerție masic ale elementului sunt concentrate la mijloc.

Pentru un element de bară cu secțiune constantă, masa totală este

$$m = \rho A l = m_0 l, \quad (4.1)$$

iar momentul de inerție masic total este

$$J = \frac{m_0 l^3}{12} + m_0 l \frac{I}{A} = \frac{\rho A l^3}{12} + \rho l I, \quad (4.2)$$

unde I este momentul de inerție axial al secțiunii transversale.

Pentru un element cilindric de bară, de diametru d și lungime ℓ ,

$$J = \frac{m_0 \ell}{12} \left(\frac{3d^2}{4} + \ell^2 \right). \quad (4.3)$$

Momentul de inerție masic total (4.2) se compune din două părți. Prima parte, $m\ell^2/12$, se datorește masei distribuite în lungul elementului la nivelul axei neutre. Partea a doua, “inerția la rotație” $\rho \ell I$, se datorește faptului că masa este distribuită și în afara axei neutre. Aceasta nu ia parte la translație, fiind activată doar de rotire.

În extensia modelului lui Rayleigh (fig. 4.1, *e*), câte o jumătate din masa totală și un moment de inerție masic negativ sunt concentrate la cele două capete. Prin această distribuție se conservă masa și momentul de inerție masic total față de mijlocul elementului. Verificarea se poate face utilizând teorema Huygens-Steiner pentru axe paralele

$$J = 2 \left(\frac{m_0 \ell}{2} \frac{\ell^2}{4} - \frac{m_0 \ell^3}{12} \right) = \frac{m_0 \ell^3}{12}.$$

Distincția de mai sus este utilă în analiza cu elemente finite. Se lucrează cu două matrici de inerție diagonale ale elementului: una pentru inerția la translație

$$[m_t^e] = m_0 \ell \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\ell^2/12 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

și una pentru inerția la rotație

$$[m_r^e] = m_0 \ell \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i^2 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

unde $i = \sqrt{I/A}$.

4.1.1.3 Coeficienți de flexibilitate

Așa cum s-a arătat în §3.3, ecuațiile de mișcare ale sistemelor cu mase concentrate solicitate la încovoiere se scriu mai ușor utilizând coeficienți de flexibilitate decât rigidități.

Dacă deplasările maselor concentrate sunt alese coordonatele care definesc mișcarea sistemului, atunci vectorul deplasărilor $\{y\}$ este legat de vectorul forțelor aplicate maselor $\{f\}$ prin matricea de flexibilitate $[\delta]$ ca în ecuația (3.78)

$$\{y\} = [\delta] \{f\}. \quad (4.6)$$

Ecuția de mișcare pentru vibrațiile libere (3.82) se poate scrie

$$[\delta] [m] \{\ddot{y}\} + \{y\} = \{0\}. \quad (4.7)$$

Problema de valori proprii corespunzătoare (3.85) este

$$\left([\delta] [m] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right) \{a\} = \{0\}. \quad (4.8)$$

Din condiția de a avea soluții nebanale se obține ecuația pulsațiilor

$$\det \left([\delta] [m] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right) = 0 \quad (4.9)$$

ale cărei soluții sunt pulsațiile proprii ale sistemului ω_r .

Forma modurilor proprii este definită de vectorii modali $\{a\}_r$, care satisfac sistemul de ecuații algebrice liniare și omogene

$$\left([\delta] [m] - \frac{1}{\omega_r^2} [I] \right) \{a\}_r = \{0\}. \quad (4.10)$$

Exemplul 4.1

Să se calculeze pulsațiile proprii ale vibrațiilor transversale ale barei cu trei mase din fig. 4.4, a , unde $EI = const$.

Rezolvare. Utilizând fig. 4.4, b , săgeata produsă în secțiunea x de o forță concentrată F aplicată la distanța b de capătul din dreapta, are expresia

$$v(x) = \frac{Fbx}{6EI\ell} (\ell^2 - x^2 - b^2).$$

Coefficienții de flexibilitate sunt

$$\delta_{ij} = \frac{b_j x_i}{6EI\ell} (\ell^2 - x_i^2 - b_j^2).$$

Deoarece $x_1 = b_3 = \ell/4$, $x_2 = b_2 = \ell/2$, $x_3 = b_1 = 3\ell/4$, matricea de flexibilitate este

$$[\delta] = \frac{\ell^3}{768EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Ecuția (4.8) poate fi scrisă

$$\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

unde

$$\lambda = 768 EI / m \ell^3 \omega^2 .$$

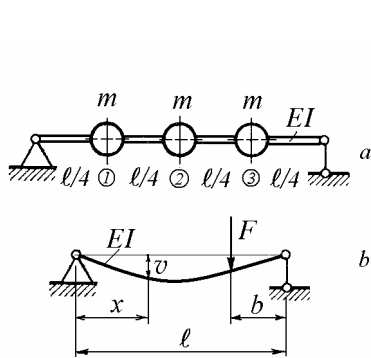


Fig. 4.4

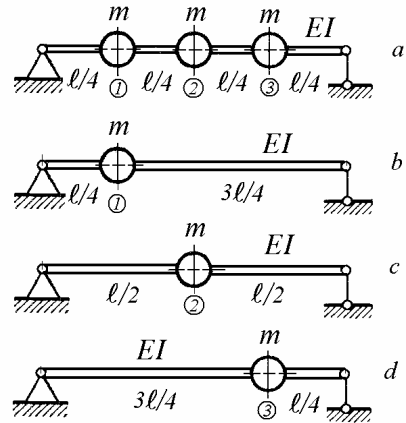


Fig. 4.5

Ecuția pulsațiilor proprii este

$$\lambda^3 - 34\lambda^2 + 78\lambda - 28 = 0 ,$$

având rădăcinile

$$\lambda_1 = 31,5563 , \quad \lambda_2 = 2 , \quad \lambda_3 = 0,4436 .$$

Pulsațiile proprii sunt

$$\omega_1 = 4,933 \sqrt{EI/m\ell^3} , \quad \omega_2 = 19,596 \sqrt{EI/m\ell^3} , \quad \omega_3 = 41,606 \sqrt{EI/m\ell^3} .$$

Vectorii modali sunt

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,4142 \\ 1 \end{Bmatrix} , \quad \{a\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} , \quad \{a\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,4142 \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

4.1.1.4 Formula lui Dunkerley

La multe sisteme, frecvențele proprii ale modului al doilea și modurilor superioare de vibrație sunt adesea mult mai mari decât frecvența proprie a primului mod de vibrație. Aceasta permite estimarea frecvenței proprii fundamentale cu ajutorul unor formule simple.

Ecuția algebrică

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0$$

are suma rădăcinilor

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Pentru ecuația pulsațiilor (5.9), se poate scrie

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} m_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{ii}^2},$$

unde ω_{ii}^2 este pătratul pulsației proprii “izolate” a sistemului care conține doar masa m_i . Această pulsație se calculează pe baza deformatei elastice exacte a sistemului cu o singură masă care are aceeași configurație ca sistemul analizat cu excepția maselor eliminate.

Deoarece $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$, toți termenii cu excepția primului pot fi neglijați în prima sumă, rezultând o formulă din care se obține o valoare aproximativă a pulsației proprii fundamentale

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{ii}^2},$$

sau

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2} + \dots \quad (4.12)$$

Astfel, inversul pătratului pulsației proprii fundamentale se poate obține însumând inversele pătratelor pulsațiilor izolate. Ecuția (4.12) este cunoscută ca *formula lui Dunkerley*. Ea a fost stabilită experimental și publicată de S. Dunkerley (1895) apoi justificată teoretic de R. V. Southwell (1921).

Formula permite estimarea pulsației proprii fundamentale a unui sistem fără rezolvarea problemei de valori proprii. Ea se aplică doar sistemelor fixate de un reper fix, deci nu poate fi aplicată în cazul sistemelor libere (fără legături). În general, valorile aproximative ale pulsației obținute cu formula lui Dunkerley sunt mai mici decât cele adevărate.

La grinda în consolă din fig. 4.3, *a* pulsația proprie fundamentală (5.16) este $\omega_{10} = 3,52\sqrt{EI/ml^3}$. La modelul cu un segment (fig. 4.3, *b*), pulsația proprie este $\omega_1 = 2,44\sqrt{EI/ml^3}$, cu 30,7% mai mică decât valoarea adevărată. Când bara este împărțită în două segmente (fig. 4.3, *c*), prima pulsație proprie este $\omega_1 = 3,098\sqrt{EI/ml^3}$, cu 12% mai mică decât cea adevărată. Când bara este împărțită în trei segmente (fig. 4.2, *d*), prima pulsație proprie este $\omega_1 = 3,286\sqrt{EI/ml^3}$, cu 7,12% mai mică, iar când este împărțită în patru segmente, cu 4,5% mai mică decât pulsația adevărată.

Exemplul 4.2

Să se calculeze pulsația proprie fundamentală a vibrațiilor transversale ale barei cu trei mase din Exemplul 4.1 (fig. 4.5, *a*) utilizând formula lui Dunkerley.

Rezolvare. Din matricea de flexibilitate (4.11) rezultă

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{9\ell^3}{768EI}, \quad \delta_{22} = \frac{16\ell^3}{768EI}.$$

Pentru sistemele cu un grad de libertate cu mase izolate (fig. 4.5, *b, c, d*), pătratele pulsațiilor proprii sunt respectiv

$$\omega_{11}^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{768EI}{9m\ell^3},$$

$$\omega_{22}^2 = \frac{1}{m\delta_{22}} = \frac{768EI}{16m\ell^3},$$

$$\omega_{33}^2 = \frac{1}{m\delta_{33}} = \frac{768EI}{9m\ell^3},$$

astfel că formula lui Dunkerley (4.12) se scrie

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2} = \frac{9m\ell^3}{768EI} + \frac{16m\ell^3}{768EI} + \frac{9m\ell^3}{768EI} = \frac{34m\ell^3}{768EI}.$$

Rezultă pulsația proprie fundamentală

$$\omega_1 \cong 4,7527\sqrt{EI/ml^3},$$

care este cu 3,6% mai mică decât valoarea adevărată calculată în Exemplul 4.1.

4.1.1.5 Formula lui Rayleigh

Pentru o bară reprezentată printr-un model cu mase concentrate, având masele m_i ($i=1, \dots, n$) atașate în punctele de abscisă x_i de o bară cu masa neglijabilă, formula lui Rayleigh devine

$$\omega_1^2 = \frac{\int EI \left(\partial^2 v / \partial x^2 \right)^2 dx}{\sum_{i=1}^n m_i v_i^2}, \quad (4.13)$$

unde $v_i = v(x_i)$ sunt săgețile statice în punctele de atașare a maselor.

Dacă energia de deformație se calculează pe baza lucrului mecanic efectuat de greutatea $m_i g$, atunci $U_{max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i g \cdot v_i$ astfel că formula lui Rayleigh (4.13) devine

$$\omega_1^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i v_i}{\sum_{i=1}^n m_i v_i^2}, \quad (4.14)$$

unde g este accelerația gravitației.

Așa cum s-a arătat în §2.1.5, dacă se utilizează deformată adevărată a sistemului vibrator, atunci pulsația proprie fundamentală obținută cu ajutorul formulei lui Rayleigh va fi valoarea adevărată. Pentru orice altă curbă, pulsația determinată prin această metodă va fi mai mare decât pulsația adevărată.

Dacă se dorește o precizie mai mare, o aproximare mai bună a curbei care definește deformată dinamică se poate obține utilizând sarcini dinamice în locul greutatea statice. Deoarece sarcina dinamică este $m_i \omega^2 v_i$, fiind proporțională cu săgeata, se poate recalcula săgeata produsă de greutatea modificate $m_1 g$, $m_2 g \frac{v_2}{v_1}$, $m_3 g \frac{v_3}{v_1}$.

Exemplul 4.3

Să se calculeze pulsația proprie a vibrațiilor transversale ale barei cu trei mase din Exemplul 4.1 (fig. 4.4, a) folosind formula lui Rayleigh (4.14).

Rezolvare. Utilizând coeficienții de flexibilitate și principiul suprapunerii efectelor, deplasarea oricărei mase se poate calcula ca suma produselor între coeficienții de flexibilitate din secțiunea respectivă și greutatea corespunzătoare.

Ecuția (4.6) se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\delta] \begin{Bmatrix} mg \\ mg \\ mg \end{Bmatrix} = mg [\delta] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

de unde rezultă

$$v_1 = mg(\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}) = \frac{27\ell^3}{768EI} mg,$$

$$v_2 = mg(\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23}) = \frac{38\ell^3}{768EI} mg,$$

$$v_3 = v_1.$$

Înlocuind în formula (4.14), se obține

$$\omega_1^2 = \frac{768EI}{m\ell^3} \frac{27 + 38 + 27}{27^2 + 38^2 + 27^2} = \frac{768EI}{9m\ell^3} \frac{92}{2902} = \frac{768}{31,54348} \frac{EI}{m\ell^3}$$

sau

$$\omega_1 = 4,9343 \sqrt{EI/m\ell^3},$$

valoare cu numai 0,02% mai mare decât cea adevărată, calculată în Exemplul 4.1.

Dacă $m = m_0 \ell / 4$, atunci sistemul din fig. 4.4, *a* este identic cu bara din fig. 4.2, *c*. Înlocuind această valoare în formula de mai sus rezultă

$$\omega_1 = 4,9343 \cdot 2 \sqrt{\frac{EI}{m_0 \ell^4}} = \frac{9,8686}{\ell^2} \sqrt{EI m_0},$$

care este mai mică decât pulsația (5.14) obținută pentru o bară cu masa distribuită

$$\omega_{adev} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{EI m_0} = \frac{9,8696}{\ell^2} \sqrt{EI m_0},$$

datorită procesului de concentrare în care nu s-a conservat masa totală.

4.1.2 Structuri multietajate forfecate

O clădire “forfecată” este o structură cu planșee rigide nedeformabile care au doar mișcări de translație orizontală. Deformarea clădirii se aseamănă cu cea produsă doar de forțele tăietoare într-o gridă în consolă; de aici numele de *clădire forfecată*.

În fig. 4.6, *a* se prezintă o clădire forfecată cu trei nivele, cu stâlpi flexibili și rigle rigide, modelată ca un cadru plan cu trei grade de libertate. Se consideră doar vibrația cadrului în planul său, datorită încovoierii stâlpilor în planul cadrului.

Pentru a se realiza o astfel de deformație într-o clădire, se fac următoarele ipoteze simplificatoare: a) toate planșeele sunt rigide și se pot mișca doar pe orizontală, astfel că în îmbinările între rigle și stâlpi nu apar rotații relative; b) toți stâlpii sunt inextensibili și cu masă neglijabilă; și c) masa clădirii este concentrată la nivelul planșeelor, astfel încât vibrația clădirii multietajate se reduce la vibrația unui sistem cu număr finit de grade de libertate.

Forfecarea este modelată convenabil prin deplasările orizontale relative ale planșeelor. Deplasării unui element orizontal *i* se opune o forță de readucere elastică datorită încovoierii stâlpilor. Dacă aceștia sunt modelați ca bare cu secțiune constantă, cu încastrări mobile la ambele capete, se poate arăta că rigiditatea combinată la încovoiere a stâlpilor de la un nivel este

$$k = \frac{12 E \cdot 2I}{\ell^3} = \frac{24EI}{\ell^3}, \quad (4.15)$$

unde *EI* este modulul de rigiditate la încovoiere al stâlpului și ℓ - înălțimea etajului (lungimea stâlpului).

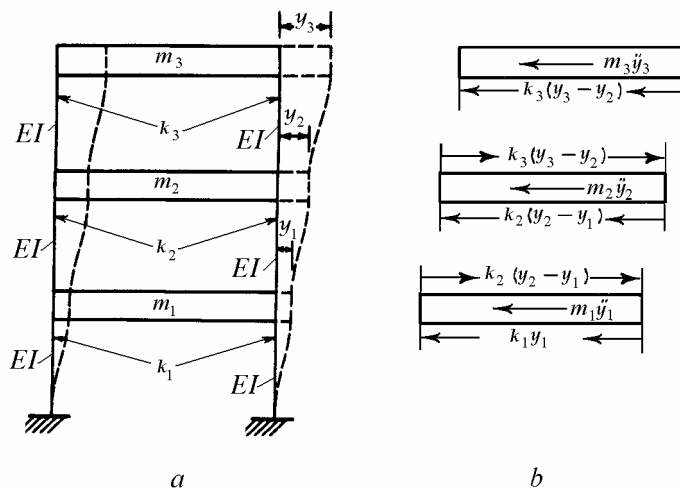


Fig. 4.6

Ecuțiile de mișcare se pot obține, folosind principiul lui d'Alembert și diagramele forțelor din fig. 4.6, *b*, egalând cu zero suma forțelor care acționează asupra fiecărei mase. Metoda este expusă pentru sisteme cu două grade de libertate în § 3.1.1.

4.1.3 Sisteme torsionale

Vibrațiile torsionale ale arborilor cotiți ai motoarelor și compresoarelor se studiază utilizând un sistem simplificat cu parametri concentrați (fig. 4.7). Acesta se obține concentrând momentele de inerție ale maselor în rotație și în translație din fiecare mecanism bielă-manivelă în discuri rigide situate în dreptul cilindrilor, în lungul unui arbore principal echivalent. Volantul, amortizorul torsional, cuplajul și rotorul mașinii antrenate sau elicea pot fi de asemenea modelate ca discuri rigide.

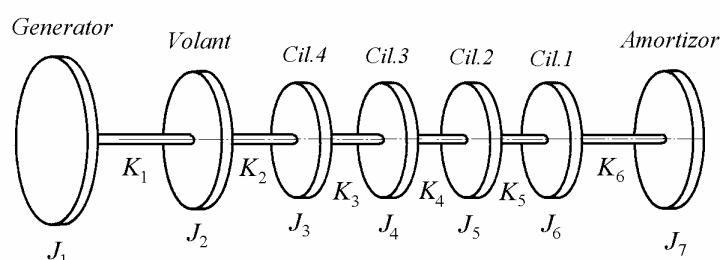


Fig. 4.7

Biela este înlocuită cu un sistem dinamic echivalent cu două mase concentrate, una la capătul din maneton, cealaltă la capătul din axul pistonului.

În fiecare cilindru există o masă în translație, m_{tr} , care constă din masa pistonului și masa redusă a bielei, și o masă în rotație, care constă din masa manivelei, contragreutatea și masa redusă a bielei, care are un moment de inerție masic J_{rot} . Valoarea medie a momentului de inerție pentru fiecare cilindru este

$$J = J_{rot} + \frac{1}{2} m_{tr} r^2,$$

unde r este raza manivelei.

Rigiditatea torsională a arborelui cotit dintre doi cilindri, care provine din efectul combinat al răsucirii fusului maneton și încovoierii brațului manivelei, poate fi aproximată numeric sau măsurată experimental. La fel se poate estima rigiditatea arborelui cotit între ultimul cilindru și volant, cea a cuplajului și a arborelui antrenat. Tot sistemul poate fi apoi redus la un model torsional cu o serie de discuri rigide conectate prin arbori elastici de masă neglijabilă, ca în fig. 4.7.

Exemplul 4.4

Un motor diesel cuplat cu un generator electric este redus la sistemul echivalent din fig. 4.8, unde valorile J sunt date în $\text{kg} \cdot \text{m}^2$, iar valorile K în $10^6 \times \text{Nm/rad}$: $J_1 = 11,863$, $J_2 = 2,011$, $J_3 = J_4 = J_5 = J_6 = 0,167$, $J_7 = 0,897$, $K_1 = 1,062$, $K_2 = 6,101$, $K_3 = K_4 = K_5 = 3,05$, $K_6 = 4,067$. Să se calculeze

primele două pulsații proprii ale vibrațiilor torsionale și să se deseneze forma modurilor respective de vibrație.

Rezolvare. $\omega_1 = 552 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 1145 \text{ rad/s}$. Formele modale sunt prezentate în fig. 4.8.

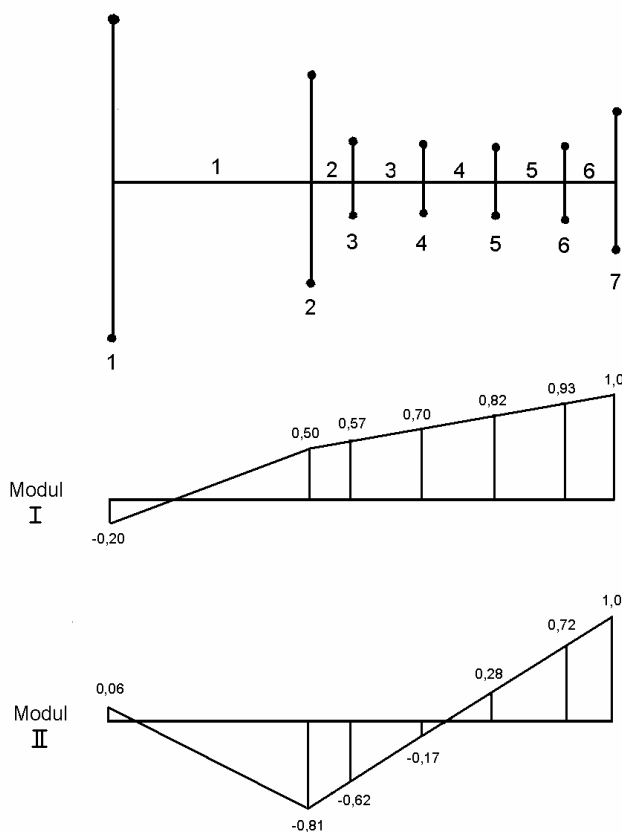


Fig. 4.8

Sisteme torsionale cu roți dințate

Sistemele cu roți dințate și ansamblul motor-cutie de viteze al autovehiculelor se modelează similar. Sistemele torsionale ramificate cu roți dințate pot fi modelate ca în §3.2.4. Este convenabilă utilizarea unui sistem echivalent fără roți dințate (sau cu roți dințate cu raport de transmisie egal cu 1) care are aceleași frecvențe proprii ca sistemul original. Acest lucru este posibil deoarece, deși roțile dințate modifică turația prin raportul de transmisie, vibrațiile se transmit prin roțile dințate fără o modificare a frecvenței, ci doar a amplitudinii.

În § 3.2.4, sistemul real cu ramuri având diferite turații a fost redus la un sistem echivalent în care toate componentele au aceeași turație, de obicei turația

arborelui de referință. Pornind de la acest arbore spre altă ramură printr-un angrenaj cu raportul de transmisie i , valorile reale J și K sunt înmulțite cu i^2 . Dacă se trece prin mai multe angrenaje, valorile următoare J și K se înmulțesc cu pătratele rapoartelor de transmisie respective. Pentru o pereche de roți în angrenare, momentul de inerție total se calculează adunând la momentul de inerție al roții de referință, momentul de inerție al roții dințate reduse înmulțit cu i^2 .

Modelul echivalent astfel obținut are aceleași frecvențe proprii ca sistemul real și aceleași poziții ale punctelor nodale. Totuși, în ramurile reduse, amplitudinea deplasărilor unghiulare se împarte la $-i$, în timp ce momentul de torsiune în ramura redusă este înmulțit cu $-i$.

În continuare se prezintă o metodă de calcul mai simplă. În modelul echivalent, arborii și discurile au turația reală, și doar roata dințată antrenată este condensată.

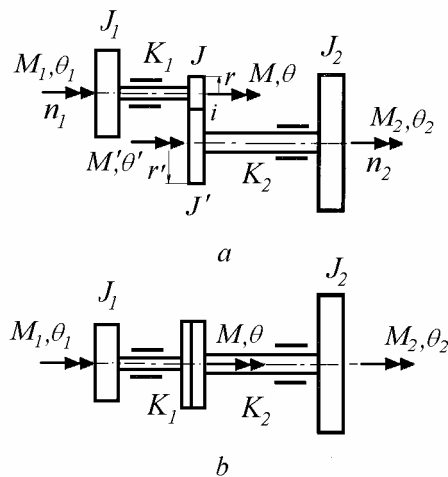


Fig. 4.9

În fig. 4.9, *a* între arborele conducător 1 și arborele condus 2 există un angrenaj cilindric, roțile dințate având momentele de inerție masice J , J' și razele r și r' . În figură s-au notat rigiditățile arborilor K_1 și K_2 , momentele de inerție ale discurilor J_1 și J_2 , deplasările unghiulare și cuplurile care acționează asupra discurilor.

Mișcarea sistemului este descrisă de patru cupluri și patru deplasări unghiulare. Totuși doar trei dintre fiecare din acestea sunt independente, datorită condițiilor de compatibilitate între roțile în contact. Astfel este util să se considere cuplul M' și deplasarea unghiulară θ' drept variabile dependente. Prin eliminarea

acestora se obține modelul echivalent din fig. 4.9, *b* în care arborele conducător *l* este ales arbore de referință.

Condiția de compatibilitate a deplasărilor unghiulare este

$$r\theta = -r'\theta',$$

iar condiția de compatibilitate a cuplurilor se scrie

$$\frac{M}{r} = -\frac{M'}{r'} \quad \text{sau} \quad M\theta = M'\theta'.$$

Raportul de transmisie este

$$i = -\frac{n_2}{n_1} = \frac{r}{r'} = -\frac{\theta'}{\theta} = -\frac{M}{M'}. \quad (4.16)$$

În sistemul original, matricea de rigiditate a arborelui 2 este definită de

$$\begin{Bmatrix} M' \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta' \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

Utilizând transformările bazate pe relațiile (4.16),

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M' \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \theta' \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta_2 \end{Bmatrix},$$

matricea de rigiditate a arborelui 2 în modelul echivalent este definită astfel

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta_2 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 K_2 & i K_2 \\ i K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

Matricea de masă este definită asemănător

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J' & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 J' & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}.$$

În continuare, ansamblul format din două discuri și arborele elastic dintre ele este considerat un element finit. Pentru un element al arborelui condus se definesc matricile

$$[k^e] = \begin{bmatrix} i^2 K_e & i K_e \\ i K_e & K_e \end{bmatrix}, \quad [m^e] = \begin{bmatrix} i^2 J'_e & 0 \\ 0 & J_e \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Matricile unui element al arborelui l din fig.5.9 sunt

$$[k^l] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}, \quad [m^l] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}.$$

Acestea se pot obține din expresiile generale (4.17) înlocuind $i = -1$. În general, pentru elemente care nu sunt situate în vecinătatea roților dințate, unul din momentele de inerție de la capete este nul.

O altă metodă constă din condensarea matricilor sistemului pe baza ecuațiilor de compatibilitate a deplasărilor unghiulare ale roților dințate în contact.

Exemplul 4.5

Sistemul ramificat cu roți dințate din fig. 4.10, a constă din trei discuri rigide cu momente de inerție J_1 , J_5 și J_6 și trei roți dințate rigide de raze r , $r/2$ și $r/3$, cu momente de inerție masice J_2 , J_3 și J_4 , conectate prin trei arbori cu rigidități torsionale K_1 , K_2 și K_3 . Să se stabilească ecuațiile vibrațiilor libere de torsiune.

Rezolvare. În ramura superioară, raportul de transmisie este $i = -2$. În ramura inferioară, raportul de transmisie este $i = -3$. Pentru sistemul echivalent prezentat în fig. 4.10, b matricile elementelor se calculează cu relațiile (4.17).

Matricile globale se assemblează utilizând metoda directă a rigidității rezultând

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + 4K_2 + 9K_3 & -2K_2 & -3K_3 \\ 0 & -2K_2 & K_2 & 0 \\ 0 & -3K_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix}$$

și

$$[M] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 + 4J_3 + 9J_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_6 \end{bmatrix}.$$

Vectorul global al deplasărilor unghiulare este

$$\{\Theta\} = \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4\}^T.$$

Ecuțiile de mișcare se scriu sub forma

$$[M]\{\ddot{\Theta}\} + [K]\{\Theta\} = \{0\}.$$

În continuare, matricile globale se notează cu litere mari și nu trebuie confundate cu matricile modale.

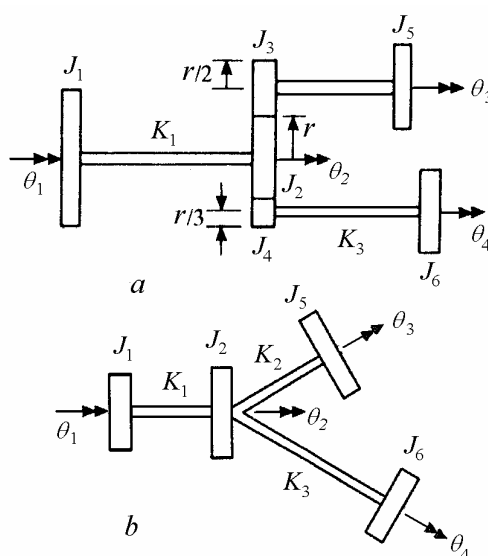


Fig. 4.10

În fig. 4.10 se prezintă modelul simplificat al sistemului de propulsie al unei nave, cu elicea J_1 antrenată de o turbină de joasă presiune J_5 și o turbină de înaltă presiune J_6 .

Pulsațiile proprii calculate sunt comparate cu pulsațiile perturbatoare. De obicei excitația principală este variația cuplului aplicat elicei, datorită variației forțelor produse de apă asupra palelor în rotație. Această perturbație are loc la *frecvența palelor*, egală cu *frecvența elicei* (o dată pe rotație) înmulțită cu numărul palelor.

Exemplul 4.6

Sistemul torsional ramificat cu roți dințate din fig. 4.11 are următorii parametri: $J_1 = 950$, $J_2 = 542$, $J_3 = 406,7$, $J_4 = J_5 = 6,78$, $J_7 = 13,55$, $J_6 = J_8 = J_9 = 27,12$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$, $i = -76/24$, $K_1 = 20,336 \cdot 10^6$, $K_2 = 8,135 \cdot 10^6$,

$K_3 = 1,22 \cdot 10^6$, $K_4 = 0,407 \cdot 10^6$, $K_5 = 1,63 \cdot 10^6$, $K_6 = 2,44 \cdot 10^6$ [Nm/rad]. Să se calculeze frecvențele proprii ale vibrațiilor torsionale.

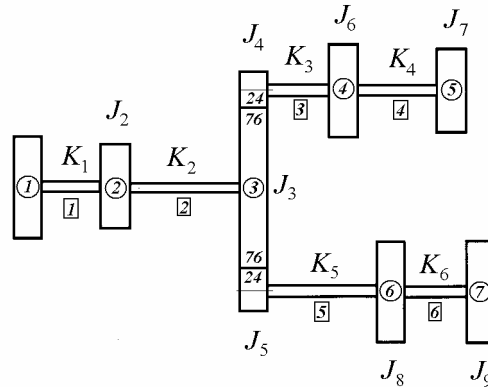


Fig. 4.11

Rezolvare. Sistemul real este redus la un model echivalent în care cele două pinioane sunt condensate. Matricile elementelor (4.17) se calculează pentru fiecare segment, apoi sunt asamblate în matricile globale de masă și de rigiditate.

Matricea de rigiditate globală este

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + i^2 K_3 + i^2 K_5 & iK_3 & 0 & iK_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iK_3 & K_3 + K_4 & -K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iK_5 & 0 & 0 & K_5 + K_6 & -K_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_6 & K_6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea de masă globală este

$$[M] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 + i^2 J_4 + i^2 J_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_9 & 0 \end{bmatrix}$$

Frecvențele proprii au următoarele valori: $f_1 = 0$, $f_2 = 14,26$, $f_3 = 22,98$, $f_4 = 35,34$, $f_5 = 41,98$, $f_6 = 50,52$, $f_7 = 75,17$ Hz.

4.1.4 Structuri (cu subsisteme) repetate

Sistemele vibratoare sunt adesea formate din subsisteme cu aceeași configurație care se repetă în spațiu. Exemplele prezentate în fig. 4.12 includ o clădire forfecată cu 5 nivele, un sistem cu 6 mase concentrate cu mișcare de translație și un sistem torsional cu 7 discuri. La aceste sisteme calculul frecvențelor proprii se poate face utilizând metoda ecuațiilor cu diferențe.

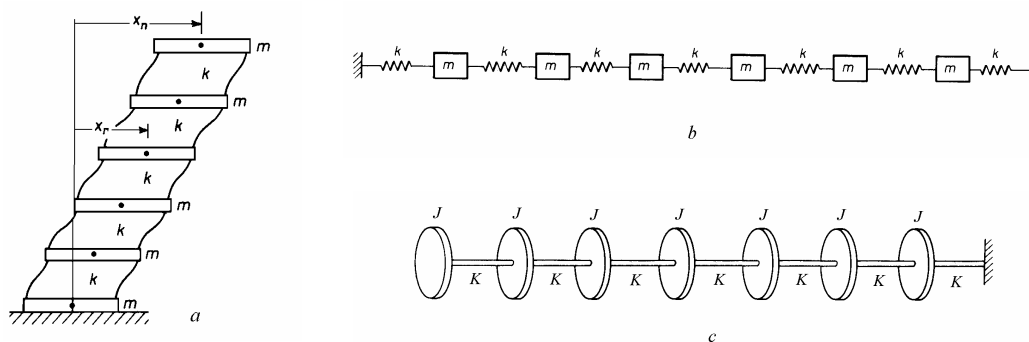


Fig. 4.12

Ecuția de mișcare a masei r (fig. 4.12, a) este

$$m \ddot{x}_r + k(x_r - x_{r-1}) - k(x_{r+1} - x_r) = 0$$

care, în cazul mișcării armonice $x_r = a_r \sin \omega t$, poate fi exprimată în funcție de amplitudini sub forma

$$a_{r+1} - 2 \left(1 - \frac{\omega^2 m}{2k} \right) a_r + a_{r-1} = 0.$$

Soluția acestei ecuații se obține înlocuind

$$a_r = e^{i\beta r},$$

ceea ce conduce la ecuația

$$\left(1 - \frac{\omega^2 m}{2k} \right) = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} = \cos \beta,$$

care mai poate fi scrisă

$$\frac{\omega^2 m}{k} = 2(1 - \cos \beta) = 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}. \quad (4.18)$$

Soluția generală pentru a_r este

$$a_r = C_1 \cos \beta r + C_2 \sin \beta r,$$

unde C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită. La $r = 0$ amplitudinea este zero $a_0 = 0$, deci $C_1 = 0$. La capătul liber, $r = n$, ecuația de mișcare este

$$m \ddot{x}_n + k(x_n - x_{n-1}) = 0$$

care, exprimată în amplitudini, devine

$$a_{n-1} = \left(1 - \frac{\omega^2 m}{k}\right) a_n.$$

Înlocuind soluția generală, se obține următoarea ecuație pentru evaluarea lui β :

$$\sin \beta(n-1) = [1 - 2(1 - \cos \beta)] \sin \beta n.$$

Acest rezultat se poate rescrie sub formă de produs

$$2 \cos \beta \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\beta}{2} = 0,$$

ecuație satisfăcută de

$$\sin \frac{\beta}{2} = 0,$$

și de

$$\cos \beta \left(n + \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \text{sau} \quad \frac{\beta}{2} = \frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}. \quad (r = 1, \dots, n)$$

Pulsațiile proprii se obțin din ecuația (4.18) sub forma

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\beta}{2} \quad (4.19)$$

care conduce la expresia

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}. \quad (r = 1, \dots, n) \quad (4.20)$$

Pulsățiile proprii calculate cu metoda ecuației cu diferențe sunt date de relația generală (4.19). Totuși, pentru fiecare structură cu subsisteme repetate, parametrul β trebuie determinat pe baza condițiilor la limită respective.

4.1.5 Sisteme discrete cu mai multe mase

Într-un sistem vibrator unidimensional, fiecare masă se mișcă într-o singură direcție. În dreptul fiecărei mase concentrate se poziționează câte un nod, fiecare nod având un singur grad de libertate. La marginile fixe se poziționează un nod blocat.

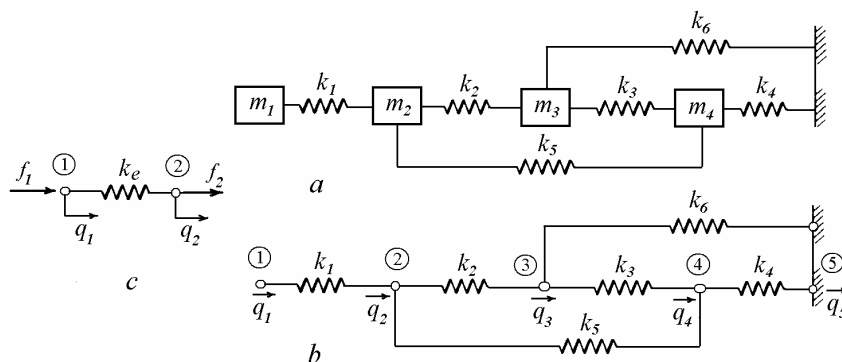


Fig. 4.13

Modelul cu patru mase din fig. 4.13, *a* are patru grade de libertate și cinci noduri. Deplasările nodale se notează q_1, q_2, \dots, q_5 (fig. 4.13, *b*). Vectorul coloană $\{\bar{Q}\} = \{q_1, q_2, \dots, q_5\}^T$ se numește *vectorul global al deplasărilor nodale* iar $\{\bar{F}\} = \{f_1, f_2, \dots, f_5\}^T$ este *vectorul global al forțelor nodale*. Deplasările și forțele sunt pozitive când sunt orientate în sensul pozitiv al direcției q . Condiția la limită $q_5 = 0$ încă nu este utilizată.

Tabelul 4.1

Elementul	Nodul	
	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	2	4
6	3	5

Cele șase arcuri sunt numerotate cu indicii rigidității respective. Fiecare arc are două noduri. Informația privind conectivitatea elementelor se prezintă convenabil ca în Tabelul 4.1. În acest tabel de conectivitate, indicii locali ai nodurilor sunt 1 și 2, iar indicii globali sunt i și j .

Cu notația din fig. 4.13, c , vectorul forțelor nodale locale $\{f^e\} = \{f_1, f_2\}^T$ poate fi exprimat în funcție de vectorul deplasărilor nodale locale $\{q^e\} = \{q_1, q_2\}^T$ prin ecuația $\{f^e\} = [k^e] \{q^e\}$ în care matricea de rigiditate a elementului este

$$[k^e] = \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Aceasta poate fi obținută din ecuațiile de echilibru și relațiile forță-deformație: pentru $q_2 = 0$, $f_1 = -f_2 = k q_1$, iar pentru $q_1 = 0$, $f_1 = -f_2 = -k q_2$.

Pe de altă parte, vectorul global al forțelor nodale $\{\bar{F}\}$ este exprimat în funcție de vectorul global al deplasărilor nodale $\{\bar{Q}\}$ prin ecuația $\{\bar{F}\} = [\bar{K}] \{\bar{Q}\}$ în care $[\bar{K}]$ este matricea de rigiditate globală neredusă.

Matricea $[\bar{K}]$ poate fi obținută prin *metoda directă a rigidității*. Utilizând informația privind conectivitatea arcurilor, elementele fiecărei matrici $[k^e]$ sunt plasate în poziția corespunzătoare din matricea de ordin mai mare $[\bar{K}]$ iar elementele din aceeași poziție sunt însumate.

Procesul de asamblare a matricii de rigiditate globale poate fi explicat prin însumarea energiilor de deformație ale elementelor.

De exemplu, energia de deformație în arcul 3 este

$$U_3 = \frac{1}{2} \{q^3\}^T [k^3] \{q^3\} = \frac{1}{2} [q_3 \quad q_4] \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}.$$

Expandând matricea de rigiditate a arcului 3 la dimensiunea sistemului, se obține

$$U_3 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{\bar{Q}\}^T [\tilde{k}^3] \{\bar{Q}\},$$

unde $[\tilde{k}^3]$ este matricea de rigiditate expandată a arcului 3.

Se observă că elementele matricii $[\tilde{k}^3]$ sunt plasate în liniile și coloanele trei și patru ale matricii $[\bar{K}]$. La însumarea energiilor de deformație ale arcurilor

$$U = \sum_e U_e = \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T [\bar{K}] \{ \bar{Q} \},$$

elementele matricii $[k^e]$ sunt plasate în pozițiile corespunzătoare din matricea globală $[\bar{K}]$, pe baza conectivității arcurilor. Elementele care se suprapun sunt adunate astfel încât

$$[\bar{K}] = \sum_e [\tilde{k}^e].$$

Pentru sistemul din fig. 4.13, a, matricea de rigiditate globală neredusă este

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_5 & -k_2 & -k_5 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 + k_6 & -k_3 & -k_6 \\ 0 & -k_5 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_6 & -k_4 & k_4 + k_6 \end{bmatrix}.$$

În continuare trebuie precizate condițiile la limită. Nodul 5 este fix, deci $q_5 = 0$ și elementul respectiv trebuie eliminat din vectorul deplasărilor. Matricea de rigiditate globală redusă se obține eliminând, din matricea de rigiditate neredusă, linia și coloana care conțin gradul de libertate “de rezemare”.

La sistemul din fig. 4.13, a matricea de rigiditate globală redusă este

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_5 & -k_2 & -k_5 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 + k_6 & -k_3 \\ 0 & -k_5 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 \end{bmatrix}.$$

Împreună cu matricea de masă diagonală

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

matricea de rigiditate este folosită pentru scrierea ecuațiilor de mișcare

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{0\}$$

și rezolvarea problemei respective de valori proprii

$$[K]\{\Phi\} = \omega^2 [M]\{\Phi\},$$

pentru determinarea modurilor reale de vibrație ale sistemului neamortizat.

Pentru sisteme care includ amortizoare vâscoase, se folosește aceeași metodă pentru asamblarea matricii de amortizare globale $[C]$. La modelul din fig. 4.14 conectivitățile arcurilor sunt valabile și pentru amortizoare deși, în general, acestea pot fi diferite.

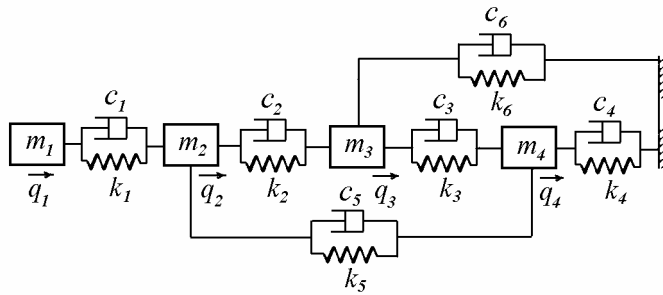


Fig. 4.14

Matricea globală de amortizare este

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 + c_5 & -c_2 & -c_5 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 + c_6 & -c_3 \\ 0 & -c_5 & -c_3 & c_3 + c_4 + c_5 \end{bmatrix}.$$

Ecuțiile mișcării libere a sistemului amortizat se scriu

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{0\}.$$

În acest caz, sistemul are moduri complexe de vibrație. Valorile proprii complexe dau pulsațiile proprii amortizate și rapoartele de amortizare modale. Sistemele cu amortizare proporțională au moduri reale de vibrație. Vibrațiile sistemelor amortizate se calculează ca în § 3.6.2 și sunt tratate într-un capitol din volumul al doilea.

Exemplul 4.7

Să se calculeze frecvențele proprii și forma modurilor proprii de vibrație ale sistemului din fig. 4.15. Masele sunt egale: $m_1 = m_2 = \dots = m_{11} = 1 \text{ kg}$, iar

rigiditățile sunt $k_1 = k_{11} = 2421 \text{ N/m}$, $k_2 = k_{10} = 2989 \text{ N/m}$, $k_3 = k_9 = 3691 \text{ N/m}$,
 $k_4 = k_8 = 4556 \text{ N/m}$, $k_5 = k_7 = 5625 \text{ N/m}$, $k_6 = 18000 \text{ N/m}$.

Rezolvare. Frecvențele proprii sunt 2,74, 2,95, 7,24, 7,80, 11,47, 12,13, 15,00, 15,62, 18,49, 19,32 și 28,57 Hz. Sistemul are cinci perechi de frecvențe proprii apropiate între ele, câte una pentru un mod simetric și una pentru un mod antisimetric. Rezultatul este tipic pentru structuri simetrice.

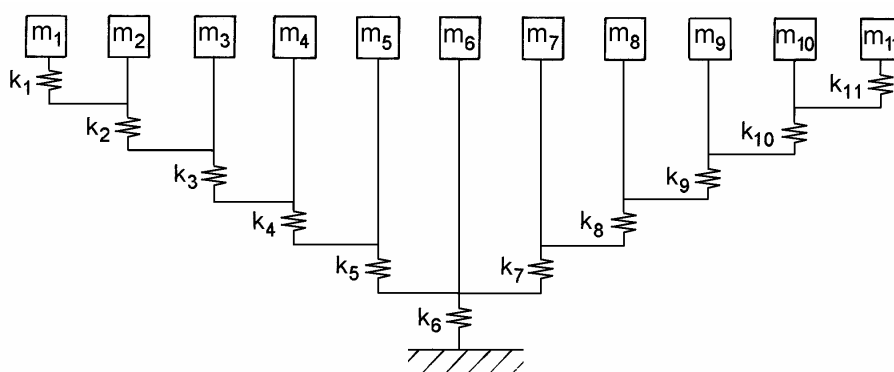


Fig. 4.15

Primele 10 moduri sunt reprezentate în fig. 4.16 față de o linie de referință verticală.

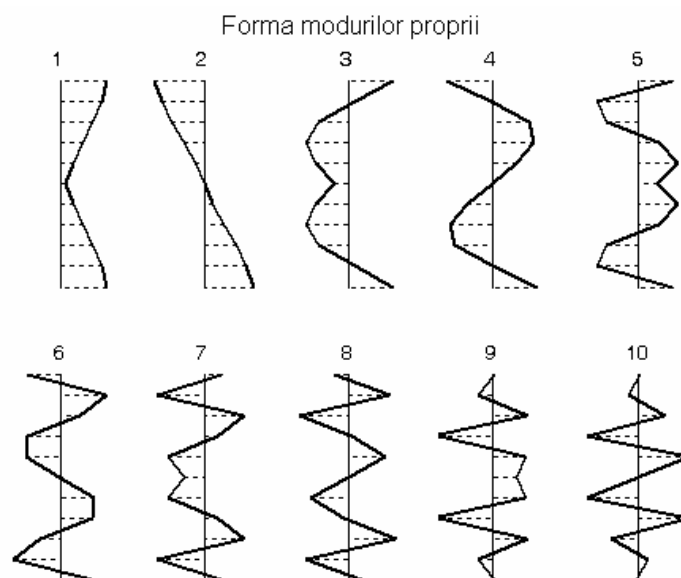


Fig. 4.16

Exemplul 4.8

La sistemul cu 15 g.d.l. din fig. 4.17 se cer matricile M , K și C . Să se calculeze apoi pulsațiile proprii amortizate și rapoartele de amortizare modale.

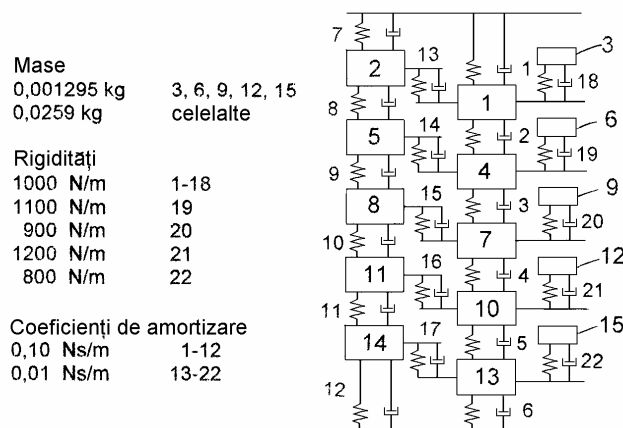


Fig. 4.17

Rezolvare. Valorile obținute cu programul VIBMKC sunt prezentate în Tabelul 4.2. Valorile rapoartelor de amortizare sunt înmulțite cu 100.

Tabelul 4.2

Modul	ω_d, Hz	$\zeta, \%$	Modul	ω_d, Hz	$\zeta, \%$
1	15,98	0,502	9	68,88	1,378
2	30,86	0,968	10	73,72	1,579
3	43,60	1,364	11	128,87	0,536
4	46,47	0,301	12	136,59	0,506
5	53,35	1,665	13	143,89	0,477
6	53,42	0,670	14	150,87	0,457
7	59,45	1,853	15	157,52	0,437
8	61,62	1,060			

Cele dinci mase din partea dreaptă a sistemului sunt cu un ordin de mărime mai mici decât celelalte mase. Aceasta produce un grup de cinci pulsații proprii sensibil mai mari decât celelalte. Datorită valorilor relativ mici ale amortizării, pulsațiile proprii amortizate sunt aproximativ egale cu pulsațiile proprii neamortizate.

4.2 Structuri plane din bare articulate

O structură de tip grindă cu zăbrele este compusă din bare articulate la capete. Principala ipoteză simplificatoare la grinzi cu zăbrele consideră că toate barele sunt conectate prin articulații fără frecare și nu transmit momente între ele.

În practică, asamblarea barelor se face prin nituire, sudare sau cu șuruburi. Totuși, modelul simplificat cu bare articulate la capete reprezintă o aproximație inginerescă surprinzător de bună. Barele articulate la capete pot prelua doar solicitări de întindere sau compresiune. În programele de analiză cu elemente finite, bara articulată la capete se numește *truss*. Structurile din bare încastrate la capete (grinzi) sunt tratate în § 4.3.

La o grindă cu zăbrele, forțele exterioare și reacțiunile se aplică doar la articulații iar barele au rigiditate axială constantă, fiind deci elemente finite naturale. Pentru a ține cont de orientarea spațială a barelor, se utilizează coordonate locale și un sistem de coordonate globale. În continuare, matricile de masă și de rigiditate ale elementelor se calculează întâi în coordonate locale, apoi în sistemul de coordonate globale. Matricile definite în sistemul global pot fi expandate la dimensiunea sistemului și apoi adunate pentru a obține matricile globale de masă și de rigiditate care sunt utilizate în rezolvarea problemei de valori proprii și în calculul răspunsului dinamic.

4.2.1 Coordonate și funcții de formă pentru elementul *truss*

Se consideră un element cu două noduri, articulată la capete, în sistemul de coordonate *local*, cu o axă în lungul elementului. Nodurile sunt numerotate convenabil 1 și 2, coordonatele lor în sistemul de referință *fizic* (cartezian) fiind x_1 și respectiv x_2 (fig. 4.18, a).

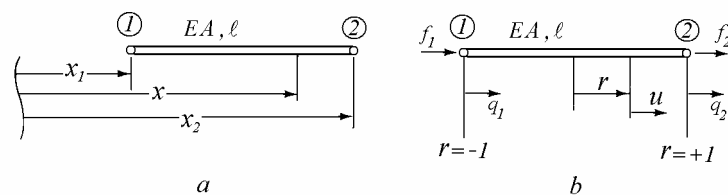


Fig. 4.18

Se definește un sistem de referință *intrinsec* sau *natural* care permite precizarea poziției unui punct din interiorul elementului printr-o coordonată adimensională

$$r = \frac{2}{x_2 - x_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), \quad (4.22)$$

astfel încât $r = -1$ la nodul 1 și $r = +1$ la nodul 2 (fig. 4.18, b).

Exprimând coordonatele *fizice* în funcție de coordonatele *naturale* rezultă

$$x = N_1(r) x_1 + N_2(r) x_2, \quad (4.23)$$

unde
$$N_1(r) = \frac{1}{2}(1-r) \quad \text{și} \quad N_2(r) = \frac{1}{2}(1+r) \quad (4.24)$$

pot fi considerate *funcții de interpolare geometrică*. Graficele acestor funcții sunt prezentate în figurile 4.19, a, b.

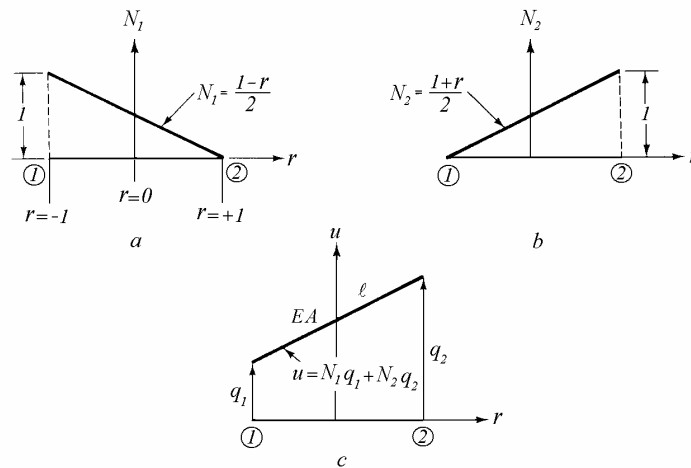


Fig. 4.19

Pentru un element de bară cu două noduri, se poate presupune o distribuție liniară a deplasărilor. Deplasarea unui punct arbitrar ales în interiorul elementului poate fi exprimată în funcție de deplasările nodale q_1 și q_2 sub forma

$$u(r) = N_1(r) q_1 + N_2(r) q_2. \quad (4.25)$$

În notație matricială

$$u = \sum_{i=1}^2 N_i q_i = [N] \{q^e\}, \quad (4.26)$$

unde

$$[N] = [N_1 \quad N_2] \quad \text{și} \quad \{q^e\} = \{q_1 \quad q_2\}^T. \quad (4.27)$$

În relația (4.26), $\{q^e\}$ este vectorul deplasărilor nodale al elementului iar $[N]$ este vectorul linie al *funcțiilor de interpolare a deplasărilor*, denumite și *funcții de formă*. Se poate verifica ușor că $u = q_1$ la nodul 1, $u = q_2$ la nodul 2 iar deplasarea u variază liniar (fig. 4.19, c).

Relațiile (4.23) și (4.25) arată că atât geometria elementului cât și câmpul de deplasări sunt interpolate utilizând aceleași funcții de formă, procedeu denumit formularea *izoparametrică*.

4.2.2 Matricile elementului în coordonate locale

În analiza dinamică, deplasarea este o funcție de spațiu și timp $u = u(x, t)$, alungirile specifice sunt $\varepsilon = \partial u / \partial x$ iar tensiunile normale sunt date de legea lui Hooke, $\sigma = E\varepsilon$.

Energia de deformație a elementului $U_e(t)$ este

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_e E_e \varepsilon^2 A_e dx = \frac{E_e A_e}{2} \int_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (4.28)$$

Transformarea de la x la r în expresia (4.22) conduce la

$$dx = \frac{x_2 - x_1}{2} dr = \frac{\ell_e}{2} dr, \quad (4.29)$$

unde $-1 \leq r \leq +1$ iar lungimea elementului este $\ell_e = |x_2 - x_1|$.

Deoarece $\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{q^e\}$ și $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{\ell_e} \frac{\partial N}{\partial r}$, unde $\frac{\partial N_1}{\partial r} = -\frac{1}{2}$

și $\frac{\partial N_2}{\partial r} = +\frac{1}{2}$, se poate scrie $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \{q^e\}^T \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{q^e\}$, astfel încât energia de deformație a elementului (4.28) devine

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T \frac{2E_e A_e}{\ell_e} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] dr \{q^e\}. \quad (4.30)$$

Expresia de mai sus are forma

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [k^e] \{q^e\}, \quad (4.31)$$

în care matricea de rigiditate a elementului $[k^e]$ este

$$[k^e] = \frac{2E_e A_e}{\ell_e} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] dr = \frac{2E_e A_e}{\ell_e} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} dr$$

sau

$$[k^e] = \frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Energia cinetică a elementului $T_e(t)$ este

$$T_e = \frac{\rho A_e}{2} \int_e \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (4.33)$$

unde ρ este densitatea materialului și $\partial u / \partial t = \dot{u}$ este viteza în secțiunea x .

Din (4.26) se obține

$$\dot{u} = [N] \{ \dot{q}^e \}, \quad (4.34)$$

unde $\{ \dot{q}^e \}$ este vectorul coloană al vitezelor nodale.

Înlocuind (4.34) în (4.33) rezultă

$$T_e = \frac{1}{2} \{ \dot{q}^e \}^T \rho A_e \int_e [N]^T [N] dx \{ \dot{q}^e \}. \quad (4.35)$$

Expresia (4.35) are forma

$$T_e = \frac{1}{2} \{ \dot{q}^e \}^T [m^e] \{ \dot{q}^e \}. \quad (4.36)$$

unde

$$[m^e] = \rho A_e \int_e [N]^T [N] dx \quad (4.37)$$

este *matricea de masă coerentă* a elementului. Aceasta este calculată prin aceeași metodă și cu aceleași funcții de formă ca matricea de rigiditate a elementului.

Schimbând variabila se obține

$$[m^e] = \frac{\rho A_e \ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} [N]^T [N] dr = \frac{\rho A_e \ell_e}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1-r)^2 & 1-r^2 \\ 1-r^2 & (1+r)^2 \end{bmatrix} dr$$

sau

$$[m^e] = \frac{\rho A_e \ell_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

4.2.3 Transformarea din coordonate locale în coordonate globale

În fig. 4.20 este reprezentat un element de bară articulată la capete (*truss*) în poziția inițială și în poziția deformată. Deplasările nodale sunt notate cu litere

mici în sistemul de coordonate local xOy și cu litere mari - în sistemul de coordonate global XOY .

În sistemul de coordonate global, fiecare nod are două grade de libertate. Un nod al cărui index global este j are gradele de libertate $2j-1$ și $2j$, și deplasările Q_{2j-1} și Q_{2j} .

În fig. 4.20 se observă că deplasarea q_1 este egală cu suma proiecțiilor deplasărilor Q_1 și Q_2 pe axa x . Astfel

$$q_1 = Q_1 \cos \alpha + Q_2 \sin \alpha . \quad (4.39, a)$$

Similar

$$q_2 = Q_3 \cos \alpha + Q_4 \sin \alpha . \quad (4.39, b)$$

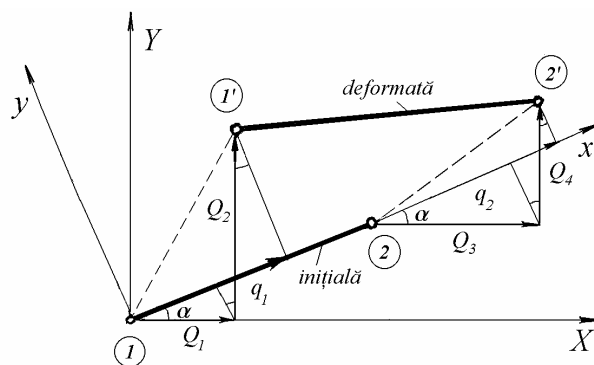


Fig. 4.20

Relațiile (4.39) se pot scrie matricial sub forma

$$\{q^e\} = [T^e] \{Q^e\}, \quad (4.40)$$

unde $\{q^e\} = \{q_1 \ q_2\}^T$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate locale, $\{Q^e\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}^T$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate globale și

$$[T^e] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

este o *matrice de transformare* a coordonatelor.

Utilizând datele referitoare la coordonatele nodale, notând (X_1, Y_1) și (X_2, Y_2) coordonatele nodurilor 1 și 2, se calculează

$$\cos \alpha = \frac{X_2 - X_1}{\ell_e}, \quad \sin \alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{\ell_e}, \quad \ell_e = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (4.42)$$

Mărimile definite de relațiile (4.42) intervin în elementele matricii (4.41).

4.2.4 Matricile elementului în coordonate globale

Înlocuind relația (4.40) în expresia energiei de deformație a elementului în coordonate locale (4.31), rezultă

$$U_e = \frac{1}{2} \{ Q^e \}^T [T^e]^T [k^e] [T^e] \{ Q^e \}. \quad (4.43)$$

În coordonate globale, energia de deformație a elementului are expresia

$$U_e = \frac{1}{2} \{ Q^e \}^T [K^e] \{ Q^e \}, \quad (4.44)$$

unde $[K^e]$ este matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale.

Comparând expresiile (4.43) și (4.44), se obține matricea de rigiditate în coordonate globale sub forma

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e]. \quad (4.45)$$

Înlocuind $[T^e]$ din relația (4.41) și $[k^e]$ din relația (4.32) se obține

$$[K^e] = \frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

unde $c = \cos \alpha$ și $s = \sin \alpha$.

Similar, energia cinetică în coordonate globale se scrie

$$T_e = \frac{1}{2} \{ \dot{Q}^e \}^T [M^e] \{ \dot{Q}^e \}. \quad (4.47)$$

Matricea de masă coerentă a elementului în coordonate globale este

$$[M^e] = [T^e]^T [m^e] [T^e],$$

sau, înlocuind $[T^e]$ din relația (5.41) și $[m^e]$ din relația (4.38)

$$[M^e] = \frac{\rho A_e \ell_e}{6} \begin{bmatrix} 2c^2 & 2cs & c^2 & cs \\ 2cs & 2s^2 & cs & s^2 \\ c^2 & cs & 2c^2 & 2cs \\ cs & s^2 & 2cs & 2s^2 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Matricea (4.46) este singulară (de ordinul 4 și de rang 1) deoarece elementul nu este rezemat. Deficiența de rang a matricii este egală cu numărul celor trei mișcări posibile de corp rigid.

4.2.5 Asamblarea matricilor de rigiditate și de masă

Matricile globale de masă și de rigiditate, $[K]$ și $[M]$, sunt asamblate pe baza matricilor elementelor $[K^e]$ și $[M^e]$ utilizând informația privind conectivitatea elementelor.

Compatibilitatea deplasărilor nodale ale elementelor cu deplasările nodale globale ale structurii poate fi exprimată prin relații de forma

$$\{Q^e\} = [\tilde{T}^e] \{\bar{Q}\}, \quad (4.49)$$

unde $\{Q^e\}$ este vectorul deplasărilor elementului în coordonate globale, $\{\bar{Q}\}$ este vectorul tuturor deplasărilor nodale ale structurii și $[\tilde{T}^e]$ este o *matrice de conectivitate* (de *localizare*), care are elemente egale cu 1 la gradele de libertate ale nodurilor și zerouri în rest.

Energia de deformare a elementului în coordonate globale poate fi exprimată în funcție de vectorul deplasărilor globale înlocuind (4.49) în (4.44)

$$U_e = \frac{1}{2} \{\bar{Q}\}^T [\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e] \{\bar{Q}\}$$

sau

$$U_e = \frac{1}{2} \{\bar{Q}\}^T [\tilde{K}^e] \{\bar{Q}\},$$

unde *matricea de rigiditate expandată a elementului*

$$[\tilde{K}^e] = [\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e] \quad (4.50)$$

are dimensiunile matricilor sistemului.

Pentru ilustrarea celor de mai sus, se consideră grinda cu zăbrele cu șapte bare din fig. 4.21.

Matricea de conectivitate a elementului 4, la care cele două noduri nu sunt numerotate consecutiv, este

$$[\tilde{T}^4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

în timp ce, pentru elementul 5, la care cele două noduri sunt numerotate consecutiv, aceasta este

$$[\tilde{T}^5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

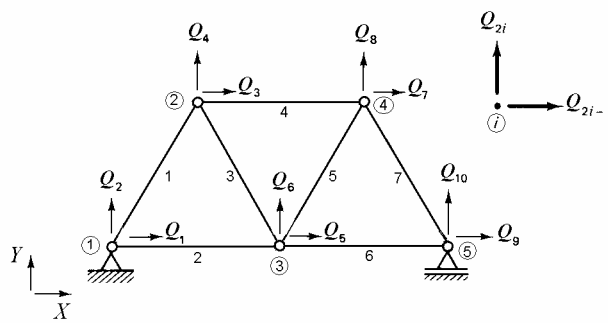


Fig. 4.21

Matricile de rigiditate expandate corespunzătoare au forma

$$[\tilde{K}^4] = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & \bullet & \bullet & & & \bullet & \bullet & & & \\ & & \bullet & \bullet & & & \bullet & \bullet & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & \bullet & \bullet & & & \bullet & \bullet & & & \\ & & \bullet & \bullet & & & \bullet & \bullet & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix}, \quad [\tilde{K}^5] = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Se poate presupune că structura este construită adăugând elementele unul după celălalt, plasând fiecare element într-o poziție predeterminată. Pe măsura adăugării elementelor la structură, capacitatea acestora de a prelua sarcinile exterioare crește, odată cu modificarea corespunzătoare a matricii de rigiditate a structurii. Matricile de rigiditate ale elementelor pot fi însumate pentru a obține

matricea de rigiditate a întregii structuri dacă acestea au “dimensiunile structurii” și dacă operează asupra unor vectori care conțin aceleași deplasări. Matricea de rigiditate a structurii se obține prin simpla adunare a matricilor de rigiditate expandate ale elementelor.

Energia de deformație a întregii structuri

$$U = \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T [\bar{K}] \{ \bar{Q} \} \quad (4.51)$$

poate fi calculată prin simpla însumare a energiilor de deformație ale elementelor

$$U = \sum_e U_e = \sum_e \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T [\tilde{K}^e] \{ \bar{Q} \} = \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T \sum_e [\tilde{K}^e] \{ \bar{Q} \}. \quad (4.52)$$

Comparând expresiile (4.51) și (4.52) se obține

$$[\bar{K}] = \sum_e [\tilde{K}^e]. \quad (4.53)$$

Matricea de rigiditate globală este egală cu suma matricilor de rigiditate expandate ale elementelor.

Similar, matricea de masă globală $[\bar{M}]$ este asamblată din matricile de masă expandate ale elementelor

$$[\bar{M}] = \sum_e [\tilde{M}^e] = \sum_e [\tilde{T}^e]^T [M^e] [\tilde{T}^e]. \quad (4.54)$$

Matricile de rigiditate și de masă nereduse $[\bar{K}]$ și $[\bar{M}]$ sunt utilizate în cazul sistemelor nerezemate. La sistemele rezemate, acestea se condensează utilizând condițiile la limită.

Efectul arcurilor și maselor concentrate se poate include adăugând valorile parametrilor respectivi în pozițiile corespunzătoare pe diagonalele principale ale matricilor respective.

4.2.6 Ecuațiile de mișcare și problema de valori proprii

Se definește lagrangianul L prin expresia

$$L = T - \Pi, \quad (4.55)$$

în care T este energia cinetică

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{Q} \}^T [M] \{ \dot{Q} \} \quad (4.56, a)$$

iar Π este energia potențială totală

$$\Pi = \frac{1}{2} \{ Q \}^T [K] \{ Q \} - \{ Q \}^T \{ F \}. \quad (4.56, b)$$

În expresia (4.56, b), $\{ F \}$ este vectorul global al forțelor nodale aplicate.

Aplicând principiul lui Hamilton, se obțin ecuațiile lui Lagrange pentru sisteme neamortizate

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\{ Q \}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \{ Q \}} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\{ Q \}}} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial \{ Q \}} = 0. \quad (4.57)$$

Utilizând regulile de derivare a unui scalar în raport cu un vector, se obțin ecuațiile de mișcare

$$[M] \{\ddot{Q}\} + [K] \{ Q \} = \{ F \}. \quad (4.58)$$

În cazul vibrațiilor libere, vectorul forțelor este zero. Astfel

$$[M] \{\ddot{Q}\} + [K] \{ Q \} = \{ 0 \}. \quad (4.59)$$

Căutând soluții de forma

$$\{ Q \} = \{ \Phi \} \sin \omega t, \quad (4.60)$$

unde $\{ \Phi \}$ este vectorul amplitudinilor deplasărilor nodale, rezultă problema generalizată de valori proprii

$$[K] \{ \phi \}_r = \omega_r^2 [M] \{ \phi \}_r, \quad (r = 1, \dots, n), \quad (4.61)$$

în care ω_r^2 sunt valorile proprii reale egale cu pătratele pulsațiilor proprii și $\{ \phi \}_r$ sunt vectorii proprii reali.

Cu ajutorul programului VIBTRUSS se pot calcula modurile proprii de vibrație ale structurilor neamortizate plane, din bare articulate la capete.

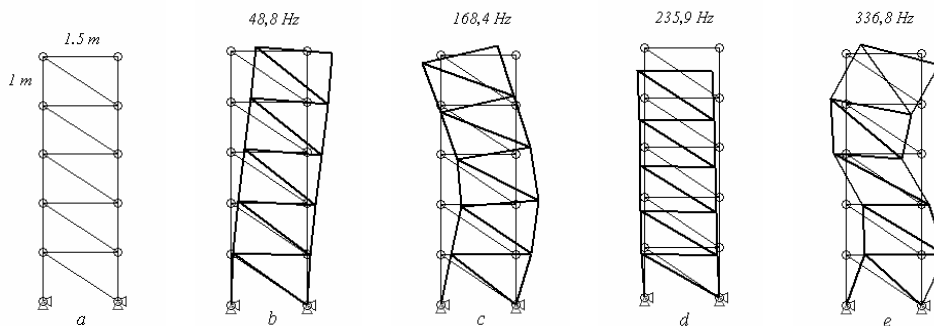


Fig. 4.22

Exemplul 4.9

Să se calculeze primele patru frecvențe proprii și forma modurilor respective de vibrație pentru grinda cu zăbrele din fig. 4.22, *a* la care $E = 200 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ și $A = 100 \text{ mm}^2$ pentru toate cele 20 bare.

Rezolvare. Primele patru frecvențe proprii sunt 48,8 , 168,4 , 235,9 și 336,8 Hz. Formele modurilor proprii sunt prezentate în figurile 4.22, *b - e*.

4.3 Cadre plane

Cadrele sunt structuri din elemente legate rigid între ele, de tipul barelor încastrate la capete sau grinzilor. În programele de analiză cu elemente finite, acest tip de bară este denumit *beam*. Grinzile sunt bare solicitate prin sarcini transversale, interconectate prin legături (nodale) rigide care au rotiri determinate și care, în afara forțelor, transmit momente încovoietoare de la un element la altul.

În acest paragraf, întâi se prezintă elementul finit *beam*, definit în coordonate locale, apoi elementul finit de *cadru* (frame) care modelează o grindă înclinată.

4.3.1 Analiza statică a unei grinzi cu secțiune constantă

În continuare se consideră grinzi cu secțiunea transversală simetrică față de planul sarcinilor aplicate (fig. 4.23). Deformațiile transversale de forfecare se neglijează.

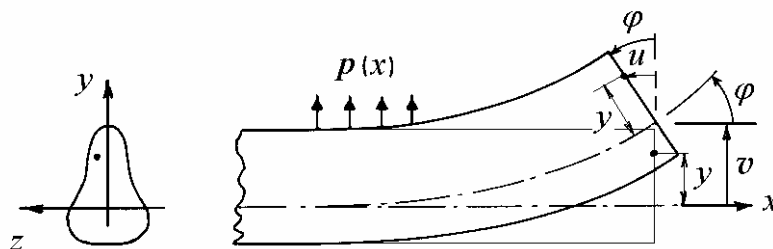


Fig. 4.23

Deplasarea axială a unui punct din secțiunea transversală, situat la distanța y de axa neutră, este aproximativ

$$u = -\varphi y = -\frac{dv}{dx} y, \quad (4.62)$$

unde v este săgeata axei barei în secțiunea x și $\varphi = v'$ este rotirea secțiunii transversale (sau panta) în x . Alungirile specifice sunt

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -\frac{d^2v}{dx^2} y. \quad (4.63)$$

Tensiunile normale în secțiunea transversală au expresia

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -E \frac{d^2v}{dx^2} y, \quad (4.64)$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului.

Momentul încovoietor se calculează pe baza distribuției tensiunilor pe înălțimea secțiunii transversale

$$M(x) = -\int_A \sigma_x y dA = EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = EI_z v'' . \quad (4.65)$$

unde I_z este momentul de inerție al secțiunii transversale față de axa neutră z .

Forța tăietoare este dată de

$$T(x) = \frac{dM}{dx} = EI_z \frac{d^3v}{dx^3} = EI_z v''' . \quad (4.66)$$

Sarcina transversală pe unitatea de lungime a barei este

$$p(x) = \frac{dT}{dx} = EI_z \frac{d^4v}{dx^4} = EI_z v^{IV} . \quad (4.67)$$

Ecuția diferențială de echilibru se scrie

$$EI_z \frac{d^4v}{dx^4} = p(x). \quad (4.68)$$

4.3.2 Discretizarea cu elemente finite

Cadrul plan este împărțit în elemente finite, ca în fig. 4.24. Fiecare nod are trei grade de libertate, două deplasări liniare și o rotire. Gradele de libertate ale nodului i sunt Q_{3i-2} - deplasarea în lungul axei X , Q_{3i-1} - deplasarea în lungul axei Y și Q_{3i} - rotirea față de axa Z .

Nodurile sunt localizate prin coordonatele lor în sistemul de referință global XOY iar conectivitatea elementelor este definită prin indicii nodurilor.

Elementele, modelate ca grinzi cu secțiunea constantă, fără deformații de forfecare și fără sarcini aplicate între noduri, au modulul de rigiditate la încovoiere EI , masa pe unitatea de lungime ρA și lungimea ℓ .

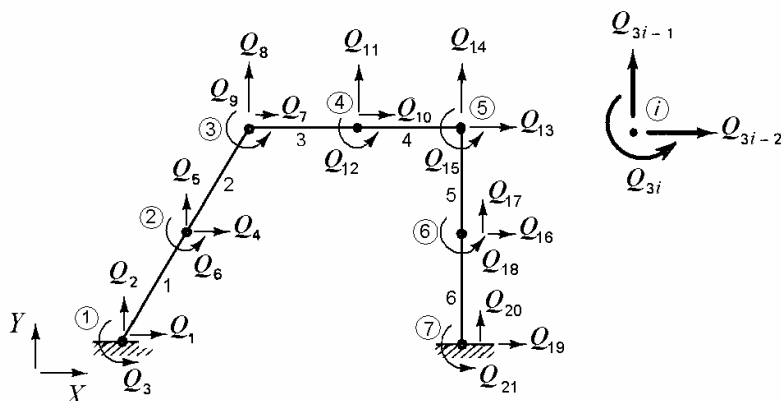


Fig. 4.24

În continuare se stabilesc funcțiile de formă pentru elementul *beam*, apoi se calculează matricile de rigiditate și de masă pentru element, întâi în sistemul de coordonate locale, apoi în sistemul global. Matricile sunt apoi expandate la dimensiunea structurii și însumate pentru a obține matricile globale nereduse. Impunând condițiile la limită, se calculează matricile reduse de rigiditate și de masă, care împreună cu matricea de amortizare sunt utilizate în analiza dinamică.

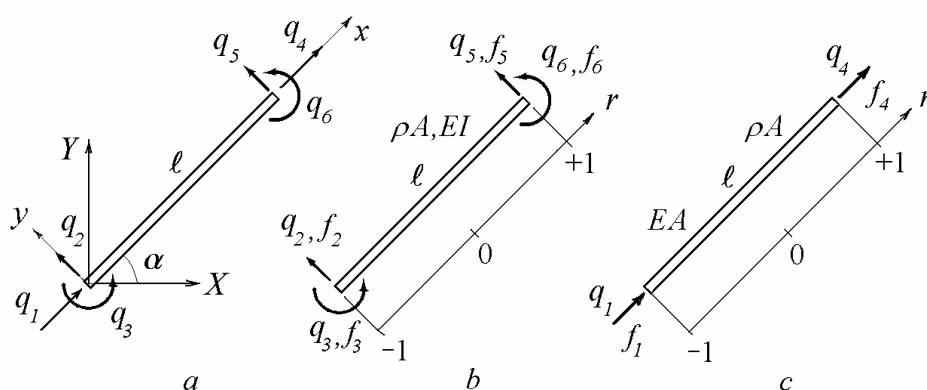


Fig. 4.25

Se consideră un element de bară înclinat, ca în fig. 4.25, *a*, în care se arată deplasările nodale și axele sistemelor de referință.

În sistemul de coordonate fizice locale, axa x , orientată în lungul barei, are originea în capătul din stânga al barei și este înclinată cu unghiul α față de axa globală X . Se mai poate folosi și un sistem de coordonate intrinseci (naturale).

Vectorul deplasărilor nodale ale elementului este

$$\{q^e\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}^T \quad (4.69)$$

iar vectorul corespunzător al forțelor nodale (se includ și momentele) ale elementului poate fi scris

$$\{f^e\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}^T. \quad (4.70)$$

Forțele (și momentele) f_2, f_3, f_5, f_6 și deplasările corespunzătoare q_2, q_3, q_5, q_6 descriu încovoierea elementului (fig. 4.25, *b*), în timp ce forțele f_1, f_4 , și deplasările q_1, q_4 , descriu efectele axiale (fig. 4.25, *c*). Acțiunea lor este decuplată astfel că matricile respective ale elementului pot fi calculate separat.

4.3.3 Funcții de formă statice pentru elementul de grindă

La o grindă cu secțiunea constantă, neîncărcată între extremități, $p = 0$ și din ecuația (4.68) rezultă $d^4v/dx^4 = 0$. Integrând de patru ori, se obține deplasarea transversală (săgeata) v descrisă de un polinom de gradul trei

$$v(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4. \quad (4.71)$$

În (4.71), cele patru constante de integrare a_1, a_2, a_3, a_4 pot fi determinate din condițiile la limită geometrice, care includ săgeata și panta la cele două capete:

$$x = x_1, v = q_2, dv/dx = q_3, \text{ și } x = x_2, v = q_5, dv/dx = q_6. \quad (4.72)$$

Deplasarea transversală poate fi exprimată în funcție de deplasările nodale sub forma

$$v = [N] \{q^e\}, \quad (4.73)$$

unde $[N]$ este vectorul linie al *funcțiilor de formă*, care sunt polinoame de gradul trei, numite *polinoame Hermite*.

Utilizând coordonate naturale, cu $r = -1$ la nodul 1 și $r = +1$ la nodul 2, deplasarea transversală poate fi scrisă

$$v(r) = N_1(r) v_1 + N_2(r) \left(\frac{dv}{dr} \right)_1 + N_3(r) v_2 + N_4(r) \left(\frac{dv}{dr} \right)_2 . \quad (4.74)$$

Deoarece transformarea coordonatelor se face conform relației (4.22)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} r \quad (4.75)$$

și deoarece $\ell_e = x_2 - x_1$ este lungimea elementului, este valabilă relația (4.29)

$$dx = \frac{\ell_e}{2} dr . \quad (4.76)$$

Calculând derivata

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\ell_e}{2} \frac{dv}{dx} , \quad (4.77)$$

relația (4.74) devine

$$v(r) = N_1(r) v_1 + N_2(r) \frac{\ell_e}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)_1 + N_3(r) v_2 + N_4(r) \frac{\ell_e}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)_2 \quad (4.78)$$

sau

$$v(r) = N_1 \cdot q_2 + \frac{\ell_e}{2} N_2 \cdot q_3 + N_3 \cdot q_5 + \frac{\ell_e}{2} N_4 \cdot q_6 . \quad (4.79)$$

În expresia (4.73) vectorul linie al funcțiilor de formă este

$$[N] = \left[N_1, \frac{\ell_e}{2} N_2, N_3, \frac{\ell_e}{2} N_4 \right] . \quad (4.80)$$

Funcțiile de formă hermitiene sunt polinoame cubice care satisfac condițiile la limită date în Tabelul 4.3 unde semnul “prim” indică derivarea în raport cu variabila r .

Tabelul 4.3

	N_1	N'_1	N_2	N'_2	N_3	N'_3	N_4	N'_4
$r = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$r = +1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Impunând condițiile de mai sus unor polinoame de gradul trei cu patru constante arbitrare, se obțin expresiile funcțiilor de formă ale elementului *beam* în coordonate naturale (4.81), reprezentate grafic în fig. 4.26:

$$\begin{aligned}
 N_1(r) &= \frac{1}{4}(1-r)^2(2+r) = \frac{1}{4}(2-3r+r^3), \\
 N_2(r) &= \frac{1}{4}(1-r)^2(1+r) = \frac{1}{4}(1-r-r^2+r^3), \\
 N_3(r) &= \frac{1}{4}(1+r)^2(2-r) = \frac{1}{4}(2+3r-r^3), \\
 N_4(r) &= -\frac{1}{4}(1+r)^2(1-r) = -\frac{1}{4}(1+r-r^2-r^3).
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

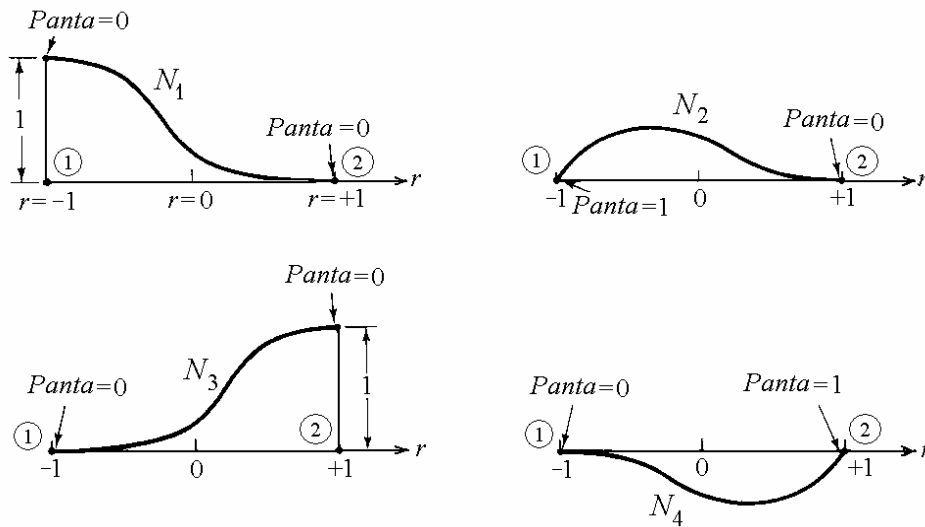


Fig. 4.26

Se poate verifica ușor că la nodul 1, $v = q_2$ și $\frac{dv}{dr} = \frac{\ell_e}{2} q_3$, iar la nodul 2,

$$v = q_5 \text{ și } \frac{dv}{dr} = \frac{\ell_e}{2} q_6.$$

4.3.4 Matricea de rigiditate a unui element de grindă

Energia de deformație U_e a unui element de grindă este

$$U_e = \frac{EI_e}{2} \int_e \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx. \tag{4.82}$$

Din relația (4.77) se obține

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{\ell_e} \frac{dv}{dr} \quad \text{și} \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{\ell_e^2} \frac{d^2v}{dr^2}.$$

Înlocuind (4.73) rezultă

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{\ell_e^2} \left[\frac{d^2N}{dr^2} \right] \{q^e\}. \quad (4.83)$$

Ridicând la pătrat se obține

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 = \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) = \{q^e\}^T \frac{16}{\ell_e^4} \left[\frac{d^2N}{dr^2} \right]^T \left[\frac{d^2N}{dr^2} \right] \{q^e\},$$

care se mai poate scrie

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 = \{q^e\}^T \frac{16}{\ell_e^4} [N_r'']^T [N_r''] \{q^e\}. \quad (4.84)$$

Înlocuind (4.76) și (4.84) în (4.82) se obține energia de deformație a elementului

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T \frac{8EI_e}{\ell_e^3} \int_{-1}^{+1} [N_r'']^T [N_r''] dr \{q^e\} \quad (4.85)$$

care are forma

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [k_B^e] \{q^e\}. \quad (4.86)$$

Comparând (4.85) cu (4.86) se obține matricea de rigiditate a elementului pentru încovoiere

$$[k_B^e] = \frac{8EI_e}{\ell_e^3} \int_{-1}^{+1} [N_r'']^T [N_r''] dr \quad (4.87)$$

sau

$$[k_B^e] = \frac{8EI_e}{\ell_e^3} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (N_1'')^2 & N_1''N_2'' & N_1''N_3'' & N_1''N_4'' \\ N_2''N_1'' & (N_2'')^2 & N_2''N_3'' & N_2''N_4'' \\ N_3''N_1'' & N_3''N_2'' & (N_3'')^2 & N_3''N_4'' \\ N_4''N_1'' & N_4''N_2'' & N_4''N_3'' & (N_4'')^2 \end{bmatrix} dr. \quad (4.88)$$

Înlocuind funcțiile de formă (4.81) și rezolvând integralele se obține matricea de rigiditate a elementului pentru încovoiere în coordonate locale

$$\left[k_B^e \right] = \frac{EI_e}{\ell_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}_e. \quad (4.89)$$

4.3.5 Matricea de masă coerentă a elementului de grindă

În calcule dinamice, deplasările laterale ale grinzii sunt funcții de spațiu și de timp, $v = v(x, t)$.

Energia cinetică instantanee a elementului de grindă este

$$T_e = \frac{\rho A_e}{2} \int_e \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (4.90)$$

unde ρ este densitatea materialului și $\partial v / \partial t = \dot{v}$ este viteza în secțiunea x .

Din relația (4.73) se obține

$$\dot{v} = [N] \{ \dot{q}^e \}, \quad (4.91)$$

unde $\{ \dot{q}^e \}$ este vectorul coloană al vitezelor nodale.

Înlocuind (4.76) și (4.91) în relația (4.90) rezultă

$$T_e = \frac{1}{2} \{ \dot{q}^e \}^T \rho A_e \int_e [N]^T [N] dx \{ \dot{q}^e \} \quad (4.92)$$

care are forma

$$T_e = \frac{1}{2} \{ \dot{q}^e \}^T [m_B^e] \{ \dot{q}^e \}. \quad (4.93)$$

unde

$$[m_B^e] = \frac{\rho A_e \ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} [N_r]^T [N_r] dr \quad (4.94)$$

este matricea de masă coerentă a elementului.

Înlocuind funcțiile de formă (4.81) și integrând produsele acestora, se obține matricea de masă coerentă a elementului de grindă în coordonate locale

$$[m_B^e] = \frac{\rho A_e \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}_e \quad (4.95)$$

Această matrice de masă este obținută prin aceeași metodă ca și matricea de rigiditate, deci este *coerentă* cu matricea de rigiditate.

4.3.6 Eforturi axiale

Forțele nodale axiale se exprimă în funcție de deplasările axiale prin relația

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix} = [k_S^e] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (4.96)$$

în care matricea de rigiditate (4.32) este

$$[k_S^e] = \frac{EA_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Similar, din relația (4.38) se obține matricea de masă a elementului pentru mișcări axiale

$$[m_S^e] = \frac{\rho A_e \ell_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

4.3.7 Matricile unui element de cadru în coordonate locale

Combinând expresiile (4.97) și (4.89) prin aranjarea elementelor în poziția corespunzătoare, se obține matricea de rigiditate a elementului de cadru plan

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}_e \quad (4.99)$$

În expresia (4.99), raportul între elementele care descriu încovoierea și cele care descriu întinderea este de ordinul $(i/\ell)^2$, unde 'i' este raza de inerție. La bare zvelte, acest raport poate fi între 1/20 și 1/50, deci matricea de rigiditate poate fi rău condiționată numeric.

Combinând expresiile (4.98) și (4.95) și aranjând elementele în poziția corespunzătoare, se obține matricea de masă coerentă a elementului de cadru plan

$$[m^e] = \frac{\rho A_e \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22\ell & 0 & 54 & -13\ell \\ 0 & 22\ell & 4\ell^2 & 0 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13\ell & 0 & 156 & -22\ell \\ 0 & -13\ell & -3\ell^2 & 0 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}_e \quad (4.100)$$

4.3.8 Transformarea coordonatelor

În fig. 4.27 se prezintă un element de cadru plan în starea inițială și cea deformată. Pentru nodul 1, deplasările liniare locale q_1 și q_2 sunt exprimate în funcție de deplasările liniare globale Q_1 și Q_2 prin relațiile

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \cos \alpha + Q_2 \sin \alpha, \\ q_2 &= -Q_1 \sin \alpha + Q_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.101)$$

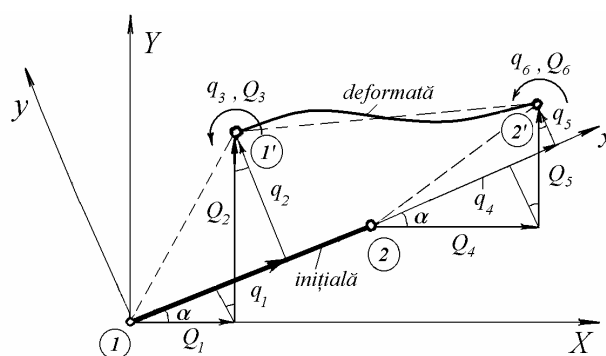


Fig. 4.27

Relațiile (4.101) pot fi scrise matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.101, a)$$

unde

$$[R] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

este o *matrice de rotație* în care $c = \cos \alpha$ și $s = \sin \alpha$.

Deplasările unghiulare (rotirile) sunt aceleași în ambele sisteme de coordonate

$$q_3 = Q_3. \quad (4.103)$$

Adăugând relațiile similare scrise pentru nodul 2

$$\begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix}, \quad q_6 = Q_6,$$

rezultă

$$\{q^e\} = [T^e] \{Q^e\}, \quad (4.104)$$

unde $\{q^e\}$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate locale, $\{Q^e\}$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate globale și

$$[T^e] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

este *matricea de transformare* din coordonate locale în coordonate globale.

4.3.9 Matricile elementului de cadru în coordonate globale

Utilizând același procedeu ca în § 4.2.4 se obțin matricile de rigiditate și de masă ale elementului de cadru în coordonate globale

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e], \quad (4.106)$$

și

$$[M^e] = [T^e]^T [m^e] [T^e]. \quad (4.107)$$

4.3.10 Asamblarea matricilor de rigiditate și de masă

Matricile globale de rigiditate și de masă, $[K]$ și $[M]$, sunt asamblate din matricile elementelor $[K^e]$ și $[M^e]$ utilizând matricile de conectivitate ale elementelor $[\tilde{T}^e]$ care stabilesc legătura între deplasările nodale la nivelul elementelor și deplasările nodale la nivelul întregii structuri, prin relații de forma

$$\{Q^e\} = [\tilde{T}^e] \{\bar{Q}\}. \quad (4.108)$$

Matricea de rigiditate globală neredusă este egală cu suma matricilor de rigiditate expandate ale elementelor

$$[\bar{K}] = \sum_e [\tilde{K}^e], \quad (4.109)$$

unde

$$[\tilde{K}^e] = [\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e]. \quad (4.110)$$

Similar, matricea de masă globală neredusă $[\bar{M}]$ este asamblată din matricile de masă expandate ale elementelor

$$[\bar{M}] = \sum_e [\tilde{M}^e] = \sum_e [\tilde{T}^e]^T [M^e] [\tilde{T}^e]. \quad (4.111)$$

La sistemele rezemate, matricile nereduse de rigiditate și de masă $[\bar{K}]$ și $[\bar{M}]$ sunt condensate utilizând condițiile la limită.

Efectul maselor concentrate și arcurilor se poate include adăugând valorile parametrilor respectivi în pozițiile corespunzătoare pe diagonalele principale ale matricilor structurii. Dacă încărcările exterioare includ sarcini distribuite, acestea sunt înlocuite cu forțe nodale cinematic echivalente, calculate printr-o metodă coerentă cu cea prin care s-au obținut matricile de rigiditate și de masă, bazată pe utilizarea funcțiilor de formă statice. Odată calculate matricile de rigiditate și de masă și vectorul forțelor, se pot obține direct ecuațiile de mișcare.

Exemplul 4.10

Să se calculeze primele 15 pulsații proprii și forme modale pentru cadrul plan din fig. 4.28 la care $E = 207 \text{ GPa}$, $\rho = 7810 \text{ kg/m}^3$, $I = 271 \text{ mm}^4$ și $A = 80,6 \text{ mm}^2$ pentru toate barele. Cadrul cu lungimea 606,9 mm și înălțimea 606,9 mm are doi stâlpi și două rigle echidistante.

Rezolvare. Datorită simetriei se consideră doar jumătate de cadru, cu legături diferite pentru modurile simetrice și cele antisimetrice.

Fiecare jumătate de cadru a fost modelată cu 16 elemente identice de grindă plană, 8 pentru stâlp și 4 pentru fiecare jumătate de riglă.

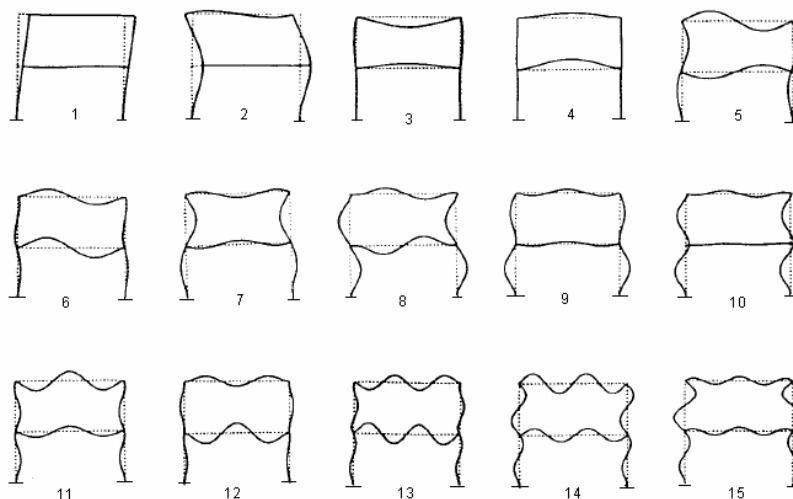


Fig. 4.28

Primele 15 pulsații proprii, calculate cu programul VIBFRAME, au următoarele valori: 107,20 , 377,47 , 397,25 , 475,73 , 1099,3 , 1316,2 , 1504,0 , 1911,6 , 2061,4 , 2447,5 , 2695,0 , 2903,7 , 4171,1 , 4618,3 și 4943,6 rad/s.

Formele modurilor proprii sunt prezentate în fig. 4.28.

Exemplul 4.11

Să se calculeze primele 15 frecvențe proprii și forma modurilor proprii ale vibrațiilor coplanare ale cadrului din fig. 4.29 dacă $E = 210 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $I = 1,055 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$, $A = 3,73 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ și $l = 0,5 \text{ m}$.

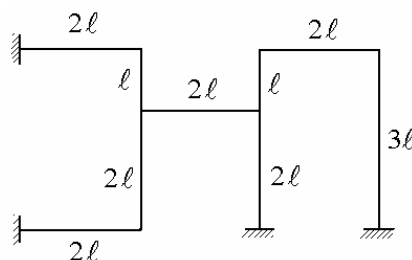


Fig. 4.29

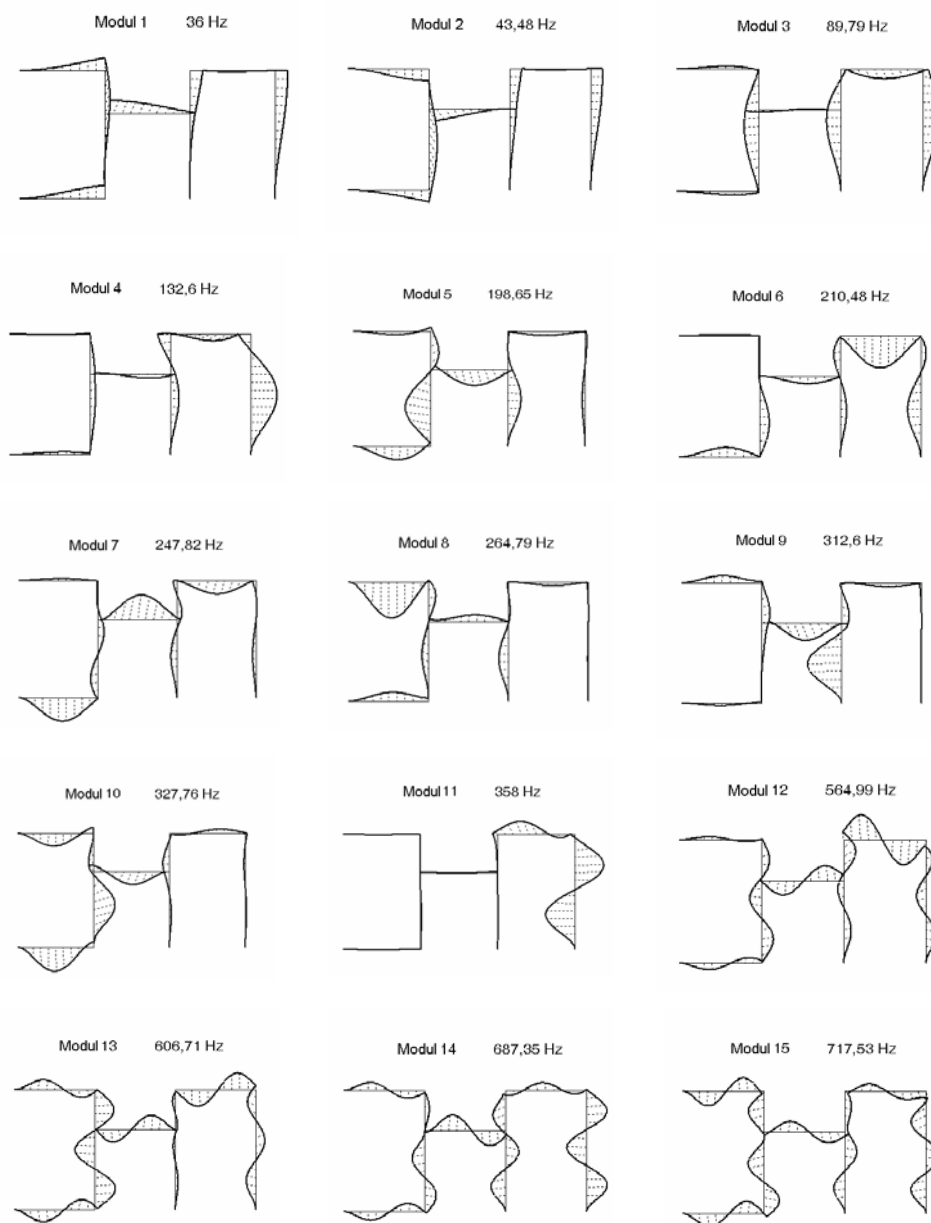


Fig. 4.30

Rezolvare. Fiecare segment de lungime ℓ a fost modelat cu 5 elemente de grindă identice, rezultând în total 85 elemente, deci 86 de noduri. Cu patru noduri fixe și trei grade de libertate pe nod, matricile condensate ale sistemului sunt

de ordinul 246. Modurile proprii calculate cu programul VIBFRAME sunt prezentate în fig. 4.30 în care apar și valorile frecvențelor proprii.

4.4 Grilaje

Grilajele sunt cadre plane solicitate de forțe perpendiculare pe planul structurii. Ele sunt cazuri speciale de cadre tridimensionale în care fiecare punct de îmbinare are doar trei deplasări nodale, o translație și două rotiri, rezultate din acțiuni de forfecare (neglijabile), încovoiere și răsucire.

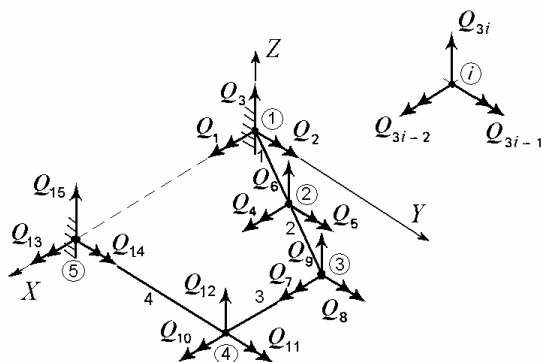


Fig. 4.31

4.4.1 Discretizarea cu elemente finite

Grilajul este împărțit în elemente, ca în exemplul din fig. 4.31. Fiecare nod are trei grade de libertate, două rotiri și o deplasare liniară, perpendiculară pe planul grilajului. Gradele de libertate ale nodului i sunt Q_{3i-2} - rotația față de axa X , Q_{3i-1} - rotația față de axa Y și Q_{3i} - deplasarea în lungul axei Z .

Nodurile sunt localizate prin coordonatele lor în sistemul de referință global XOY iar conectivitatea elementelor este definită prin indicii nodurilor. Elementele sunt modelate ca bare cu secțiune constantă, solicitate la încovoiere și răsucire, fără deformații de forfecare și fără sarcini între noduri. Proprietățile caracteristice sunt modulele de rigiditate la încovoiere EI și la răsucire GI_t , masa pe unitatea de lungime ρA și lungimea ℓ . Se consideră doar bare cu secțiuni al căror centru de forfecare coincide cu centrul de greutate.

4.4.2 Matricile elementului de grilaj în coordonate locale

Se consideră un element de grilaj înclinat, ca în fig. 4.32, *a*, în care se arată deplasările nodale în coordonate locale și în coordonate globale.

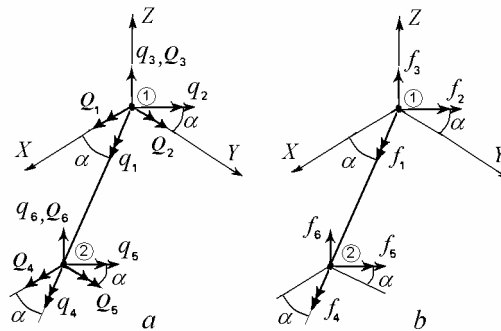


Fig. 4.32

În sistemul local de coordonate fizice, axa x , orientată în lungul barei, este înclinată cu unghiul α față de axa globală X . Axa z a sistemului local de coordonate este coliniară cu axa Z a sistemului global. Alternativ, se mai poate folosi un sistem de coordonate intrinseci (naturale).

Vectorul deplasărilor nodale ale elementului este

$$\{q^e\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}^T \quad (4.112)$$

iar vectorul corespunzător al forțelor nodale ale elementului se poate scrie

$$\{f^e\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}^T. \quad (4.113)$$

În (4.113) f_3, f_6 sunt forțe transversale, iar f_2, f_5 sunt cupluri care produc încovoire (fig. 4.32, *b*). În (4.112) deplasările q_3, q_6 sunt translații, în timp ce q_2, q_5 sunt rotații. Vectorii coloană corespunzători sunt legați prin matricea de rigiditate la încovoire.

Rearanjând matricea (4.89) rezultă

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI_e}{l_e^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 6l & 2l^2 & -6l \\ 6l & 12 & 6l & -12 \\ 2l^2 & 6l & 4l^2 & -6l \\ -6l & -12 & -6l & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}. \quad (4.114)$$

Cele patru forțe nodale ale elementului sunt legate de accelerațiile nodale respective prin matricea de masă. Rearanjând matricea (4.95) relația se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \frac{\rho A_e \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 4\ell^2 & 22\ell & -3\ell^2 & 13\ell \\ 22\ell & 156 & -13\ell & 54 \\ -3\ell^2 & -13\ell & 4\ell^2 & -22\ell \\ 13\ell & 54 & -22\ell & 156 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{Bmatrix}. \quad (4.115)$$

Forțele nodale axiale f_1, f_4 sunt cupluri de răsucire iar deplasările nodale q_1, q_4 sunt unghiuri de răsucire. Deoarece descriu efecte torsionale, acțiunea lor este decuplată de încovoiere. Matricile respective de rigiditate și de masă pot fi calculate separat. Ele se calculează la fel ca matricile de rigiditate și de masă pentru solicitări axiale.

Unghiul de răsucire, exprimat prin funcțiile de formă (4.24)

$$\theta(r) = N_1(r) q_1 + N_2(r) q_4,$$

poate fi înlocuit în expresia energiei de deformație $U_e = \frac{GI_{te}}{2} \int_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx$. După

trecerea la coordonate naturale se obține matricea de rigiditate pentru torsiune

$$[k_t^e] = \frac{2GI_{te}}{\ell_e} \int_{-1}^{+1} [N_r']^T [N_r'] dr.$$

Datorită acestei analogii, forțele nodale pot fi exprimate în funcție de deplasările nodale prin relația

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix} = [k_t^e] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \quad (4.116)$$

în care matricea de rigiditate pentru torsiune este

$$[k_t^e] = \frac{GI_{te}}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.117)$$

În expresia (4.117), G este modulul de elasticitate transversal iar I_{te} este constanta torsională a secțiunii transversale. În cazul secțiunilor axial-simetrice, această constantă este momentul de inerție polar.

Similar, matricea de masă coerentă a elementului pentru torsiune este

$$[m_t^e] = \frac{\rho I_{te} \ell_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

Pentru elementul de grilaj, combinând elementele matricilor de rigiditate (4.114) și (4.117), se obține matricea de rigiditate în coordonate locale, care exprimă forțele nodale (4.113) în funcție de deplasările nodale (4.112)

$$[k^e] = \frac{EI_e}{\ell_e^3} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 & 6\ell & 0 & 2\ell^2 & -6\ell \\ 0 & 6\ell & 12 & 0 & 6\ell & -12 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2\ell^2 & 6\ell & 0 & 4\ell^2 & -6\ell \\ 0 & -6\ell & -12 & 0 & -6\ell & 12 \end{bmatrix}_e \quad (4.119)$$

unde $a = GI_{te}\ell_e^2/EI_e$.

Combinând elementele matricilor de masă (4.115) și (4.118) se obține matricea de masă coerentă a elementului de grilaj în coordonate locale

$$[m^e] = \frac{\rho A_e \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 & 22\ell & 0 & -3\ell^2 & 13\ell \\ 0 & 22\ell & 156 & 0 & -13\ell & 54 \\ b & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & -3\ell^2 & -13\ell & 0 & 4\ell^2 & -22\ell \\ 0 & 13\ell & 54 & 0 & -22\ell & 156 \end{bmatrix}_e \quad (4.120)$$

în care $b = 70I_{te}/A_e$.

4.4.3 Transformarea coordonatelor

Înainte asamblării în matricile globale ale grilajului, este necesară transformarea matricilor (4.119) și (4.120) din sistemul local în sistemul global de coordonate. Deoarece direcția z a axelor locale coincide cu direcția Z a axelor globale, trebuie transformate doar rotirile. Transformarea coordonatelor este definită de relația (4.104)

$$\{q^e\} = [T^e] \{Q^e\}, \quad (4.121)$$

în care $\{q^e\}$ este vectorul deplasărilor elementului (4.112) în sistemul de coordonate locale,

$$\{Q^e\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}^T$$

este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate global (fig. 4.32) și

$$[T^e] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.122)$$

în care $c = \cos \alpha$ și $s = \sin \alpha$, este *matricea de transformare* (4.105) de la coordonate locale la coordonate globale. Aceeași matrice de transformare (4.122) este utilizată pentru forțele nodale.

4.4.4 Matricile elementului de grilaj în coordonate globale

Utilizând aceeași metodă ca în § 4.2.4 și § 4.2.5, se obțin matricile de rigiditate și de masă ale elementului de grilaj în coordonate globale

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e] \quad (4.123)$$

și

$$[M^e] = [T^e]^T [m^e] [T^e]. \quad (4.124)$$

Ele pot fi utilizate la asamblarea matricilor de rigiditate și de masă nereduse, $[\bar{K}]$ și $[\bar{M}]$, folosind matricile de conectivitate ale elementelor $[\tilde{T}^e]$ care exprimă deplasările nodale la nivelul elementului în funcție de deplasările nodale la nivelul întregii structuri prin relații de forma (4.108).

La sisteme rezemate, matricile nereduse $[\bar{K}]$ și $[\bar{M}]$ sunt apoi condensate utilizând condițiile la limită. Efectul rigidității arcurilor și al maselor concentrate poate fi inclus adăugând valorile acestora în pozițiile definite de gradele de libertate respective pe diagonalele principale ale matricilor respective.

Exemplul 4.12

Să se calculeze primele 9 moduri proprii de vibrație ale grilajului din fig. 4.33, rezemat pe patru arcuri de rigiditate $k = 1000 \text{ N/m}$ fiecare. Proprietățile sistemului sunt $E = 210 \text{ GPa}$, $G = 81 \text{ GPa}$, $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, $\ell = 0,5 \text{ m}$ și diametrul barelor $d = 20 \text{ mm}$.

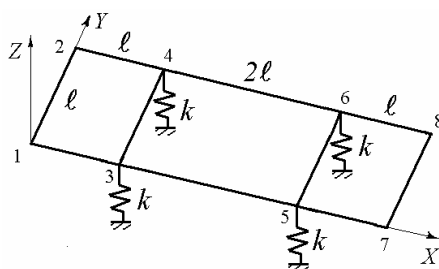


Fig. 4.33

Rezolvare. Grilajul a fost modelat cu 10 elemente și 8 noduri, având astfel 24 grade de libertate. Formele modurilor proprii, calculate cu programul VIBGRID, sunt prezentate în fig. 4.34 împreună cu valorile frecvențelor proprii.

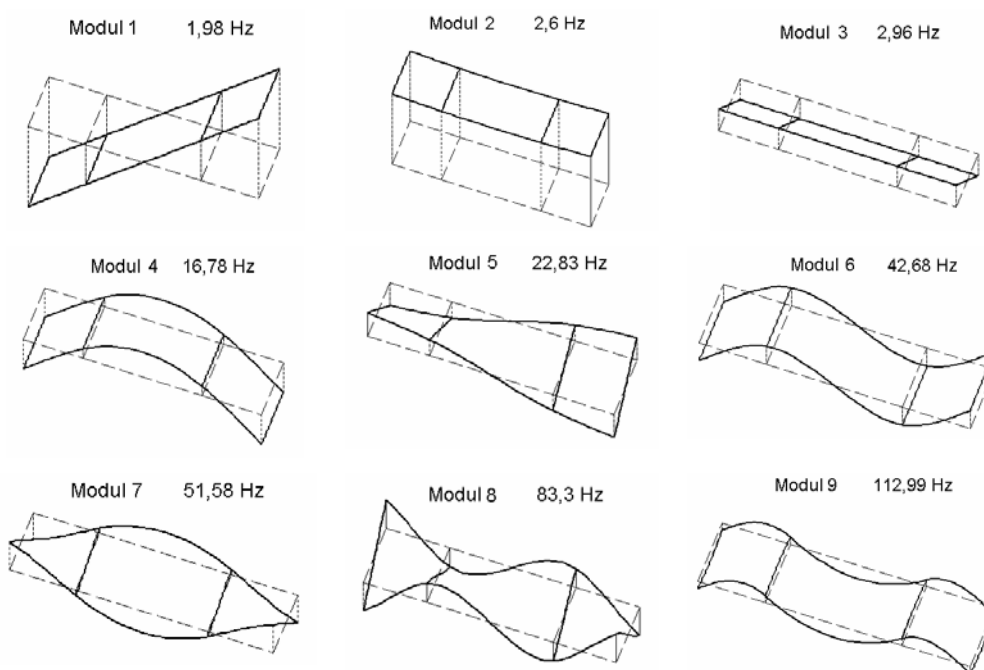


Fig. 4.34

Primele trei moduri de vibrație sunt moduri de ‘corp rigid’, de rotație și translație ale grilajului nedeformat pe arcurile de suspensie. Modul 4 este ‘primul mod de încovoiere’ (două linii nodale pe lățime), modul 5 este ‘primul mod de torsiune’ (o linie nodală longitudinală), modul 6 este ‘al doilea mod de încovoiere’ (trei linii nodale pe lățime), modul 7 este ‘al doilea mod de torsiune’, modul 8 este ‘al treilea mod de torsiune’ și modul 9 este ‘al treilea mod de încovoiere’.

Exemplul 4.13

Grilajul din fig. 4.35 este încastrat în punctele 1 și 2, având $l=1\text{ m}$, $I = 0,785 \cdot 10^{-8}\text{ m}^4$, $I_t = 1,57 \cdot 10^{-8}\text{ m}^4$, $A = 3,14 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2$, $\rho = 7900\text{ kg/m}^3$, $E = 210\text{ GPa}$ și $G = 81\text{ GPa}$. Să se calculeze primele 9 moduri proprii de vibrație.

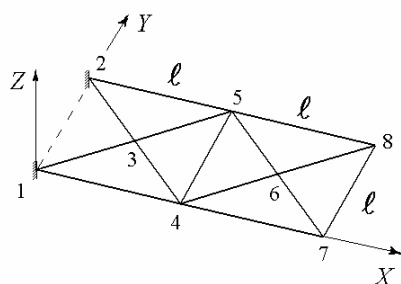


Fig. 4.35

Rezolvare. Grilajul a fost modelat cu 14 elemente și 8 noduri, având 18 grade de libertate. Formele modurilor proprii calculate cu programul VIBGRID sunt prezentate în fig. 4.36 împreună cu valorile frecvențelor proprii.

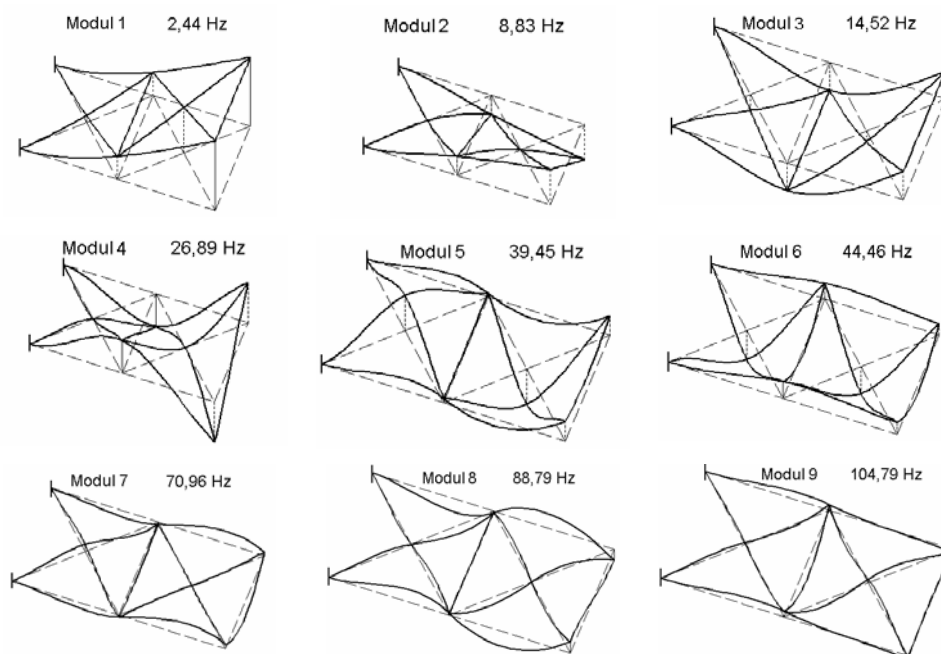


Fig. 4.36

Modul 1 este ‘primul mod de încovoiere’, modul 2 este ‘primul mod de torsiune’, modul 3 este ‘al doilea mod de încovoiere’, modul 4 este ‘al doilea mod de torsiune’, modul 5 este ‘modul al treilea de încovoiere’ iar modul 6 este un ‘prim mod de încovoiere’ față de axa longitudinală.

4.5 Funcții de răspuns în frecvență

Prima parte a acestui capitol a fost consacrată calculului modurilor proprii de vibrație ale sistemelor neamortizate de ordin relativ mic. În continuare se studiază răspunsul în frecvență al sistemelor amortizate și se prezintă diagramele funcțiilor de răspuns în frecvență (FRF) ale acestora. Analiza FRF măsurate experimental face obiectul unui capitol din volumul al doilea în care se prezintă *Analiza modală experimentală și Identificarea sistemelor vibratoare*.

4.5.1 Matricea FRF

Pentru un sistem cu amortizare vâscoasă, matricea funcțiilor de răspuns în frecvență (matricea FRF) din (3.143) are forma

$$[H(i\omega)] = [\omega^2 [m] + i\omega [c] + [k]]^{-1}, \quad (4.125)$$

unde ω este pulsația excitatoare.

Matricea FRF poate fi scrisă

$$[H(i\omega)] = \begin{bmatrix} h_{11}(i\omega) & h_{12}(i\omega) & \dots & h_{1n}(i\omega) \\ h_{21}(i\omega) & h_{22}(i\omega) & \dots & h_{2n}(i\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(i\omega) & h_{n2}(i\omega) & \dots & h_{nn}(i\omega) \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

unde $h_{j\ell}(i\omega)$ este răspunsul măsurat la coordonata j produs de o forță armonică aplicată la coordonata ℓ .

Există mai multe tipuri de funcții de răspuns în frecvență, după cum răspunsul este o deplasare, viteză sau accelerație (v. § 2.4.7). Utilizând notația complexă, dacă excitația $f_\ell(t) = \hat{f}_\ell e^{i\omega t}$ produce răspunsul $x_j(t) = \hat{x}_j e^{i(\omega t + \phi)}$, atunci receptanța complexă poate fi exprimată prin componentele reală și imaginară

$$h_{j\ell}(i\omega) = \frac{f_\ell}{x_j} = \frac{\hat{f}_\ell}{\hat{x}_j} e^{i\phi} = \frac{\hat{f}_\ell}{\hat{x}_j} \cos\phi + i \frac{\hat{f}_\ell}{\hat{x}_j} \sin\phi = h_{j\ell}^R(\omega) + i h_{j\ell}^I(\omega).$$

Raportul f_ℓ/x_ℓ se numește *receptanță directă* (receptanța în punctul de aplicare a forței), în timp ce raportul f_ℓ/x_j ($j \neq \ell$) se numește *receptanță de transfer* sau *inter-receptanță* după cum j este o coordonată în alt punct, sau în același punct ca ℓ dar pe altă direcție.

De notat că FRF sunt mărimi măsurabile care pot fi determinate prin încercări cu excitație armonică.

4.5.2 Diagramele FRF

FRF sunt mărimi complexe, definite de trei cantități – frecvența plus părțile reală și imaginară (sau modulul și faza) – care sunt reprezentate grafic.

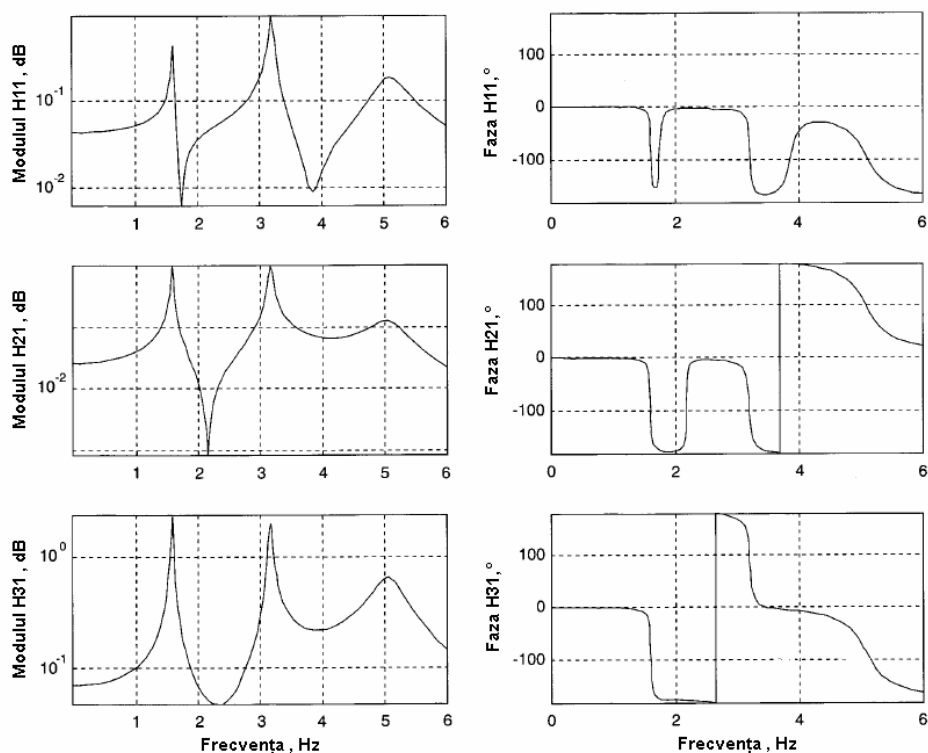


Fig. 4.37

Cele trei formate grafice de prezentare a FRF sunt: a) diagramele Bodé (modulul în funcție de frecvență și faza în funcție de frecvență); b) diagramele componentelor în fază și în cuadratură (componenta reală în funcție de frecvență și componenta imaginară în funcție de frecvență); și c) diagramele Nyquist (partea imaginară în funcție de partea reală, eventual cu gradații la intervale egale de frecvență).

Graficele includ FRF de tipul mișcare/forță, cum sunt receptanța, mobilitatea și inertanța (acceleranța), și inversele acestora (forță/mișcare), rigiditatea dinamică, impedanța și masa dinamică (v. § 2.4.7). Diagramele pot avea scară liniară, logaritmică sau semilogaritmică, cu sau fără carioaj, cu unul sau două cursoare, posibilități de ‘zoom’ sau de suprapunere a mai multor curbe.

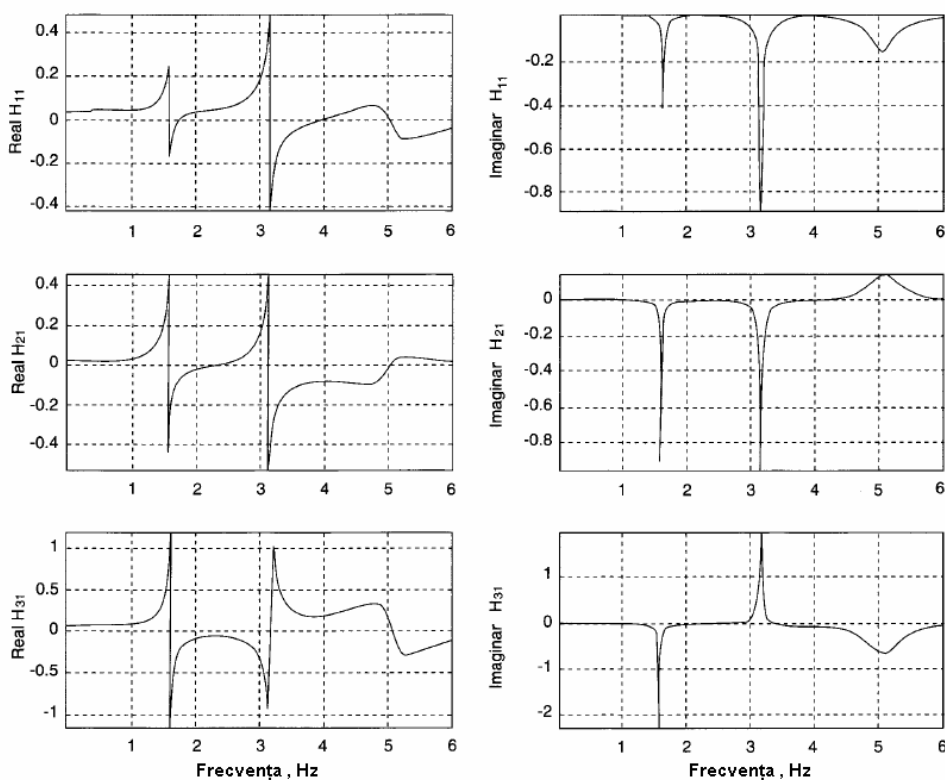


Fig. 4.38

În fig. 4.37 se prezintă diagramele Bodé ale receptanțelor unui sistem amortizat cu trei grade de libertate, pentru deplasări măsurate în g.d.l. 1, 2, și 3, produse de o forță aplicată în g.d.l. 1. Diagramele modului au scară verticală logaritmică, necesară pentru detalierea răspunsului de nivel relativ scăzut din vecinătatea antirezonanțelor.

În fig. 4.38 se arată diagramele componentelor reală (în fază) și imaginară (în cuadratură) ale acelorași receptanțe, iar în prima coloană a fig. 4.39 se arată diagramele Nyquist corespunzătoare. Se observă că, la sisteme slab amortizate și cu frecvențe proprii relativ depărtate, buclele răspunsului în vecinătatea rezonanțelor pot fi approximate cu cercuri.

Pentru comparație, în coloanele a doua și a treia din fig. 4.39 sunt prezentate diagramele mobilităților și inertanțelor, pentru aceleași FRF. Se observă

rotirea acestora cu 90^0 , respectiv 180^0 , în planul complex, datorită defazajului între deplasare, viteză și accelerație.

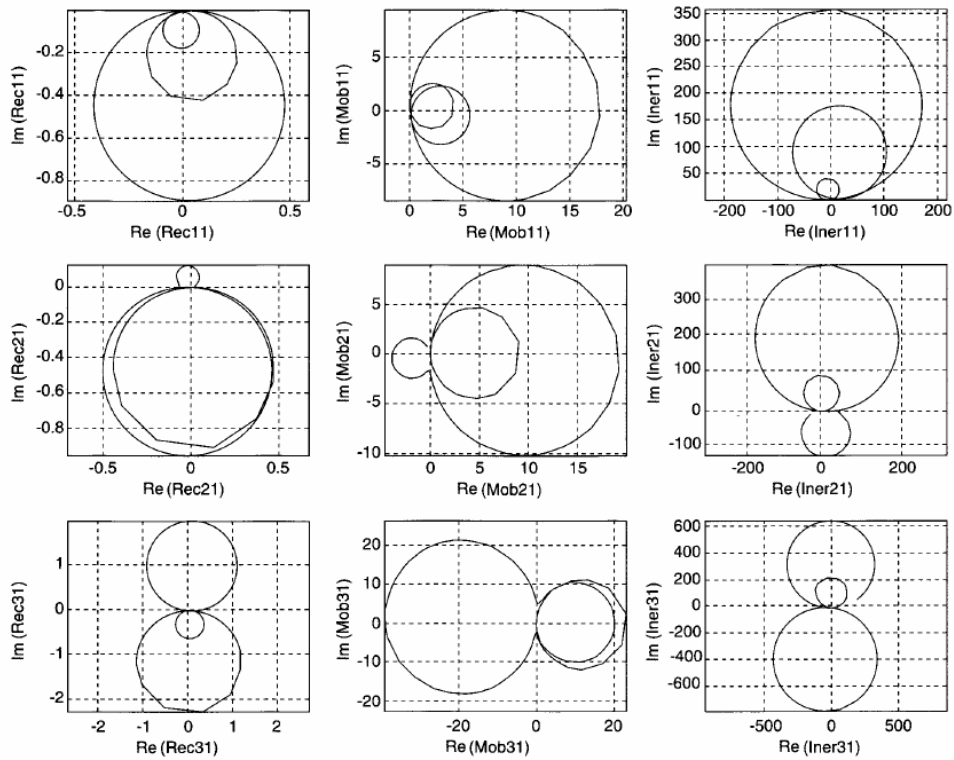


Fig. 4.39

În fig. 4.40 se prezintă o diagramă tridimensională a receptanței directe h_{11} , împreună cu diagramele Nyquist și ale părților reală și imaginară.

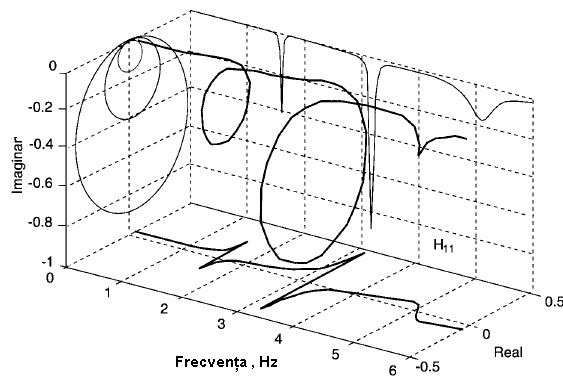


Fig. 4.40

La sisteme slab amortizate și cu densitate modală mică, vârfurile din diagramele FRF ale modulului și componente imaginare ale receptanței, mobilității sau accelerației indică *rezonanțe*. Un sistem cu n grade de libertate, cu moduri de vibrație cu amortizare subcritică, are n rezonanțe. Adesea, simpla analiză vizuală a diagramelor FRF permite estimarea ordinului sistemului, prin numărarea vârfurilor de rezonanță din domeniul frecvențelor de interes.

Așa cum s-a arătat pentru sisteme cu două grade de libertate (fig. 3.49), la sisteme cu amortizare mare și/sau frecvențe proprii relativ apropiate este posibil ca diagramele FRF să nu aibă vârfuri la unele rezonanțe. La sisteme cu amortizare moderată, cea mai precisă localizare a rezonanțelor se face pe diagramele Nyquist, în punctele în care viteza de variație cu frecvența a unghiului de fază (sau a lungimii arcului de cerc) are un maxim local. Dacă o astfel de diagramă este gradată la creșteri egale ale frecvenței excitatoare, rezonanța poate fi localizată acolo unde distanța între două puncte succesive este maximă (ca în fig. 3.48).

Antirezonanțele apar ca minime pronunțate în diagramele modulului FRF de tipul mișcare/forță. La o FRF directă, rezonanțele și antirezonanțele alternează (teorema reactanțelor a lui Foster). Între două vârfuri de rezonanță apare un minim pronunțat de antirezonanță. La o FRF de transfer, unele sau toate antirezonanțele sunt înlocuite de minime aplatisate. Numărul și poziția antirezonanțelor variază în diagramele FRF calculate în alte puncte sau pe alte direcții.

În fig. 4.41 se prezintă diagramele receptanțelor unei structuri, calculate în același punct dar pentru trei direcții diferite. Figura ilustrează alinierea vârfurilor de rezonanță precum și numărul și poziția diferită a minimelor de antirezonanță. Curba de sus, la care rezonanțele și antirezonanțele alternează, este a unei receptanțe directe.

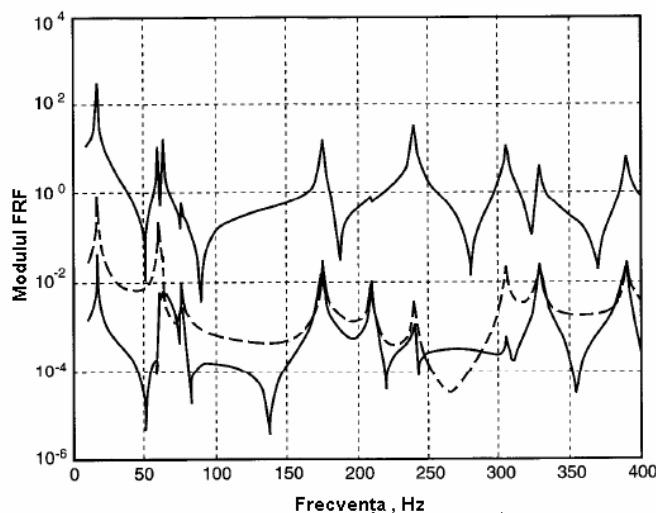


Fig. 4.41

În fig. 4.42 sunt redată diagraamele receptanței $h_{3,15}$ calculate pentru sistemul cu 15 grade de libertate din Exemplul 4.8 (fig. 4.17).

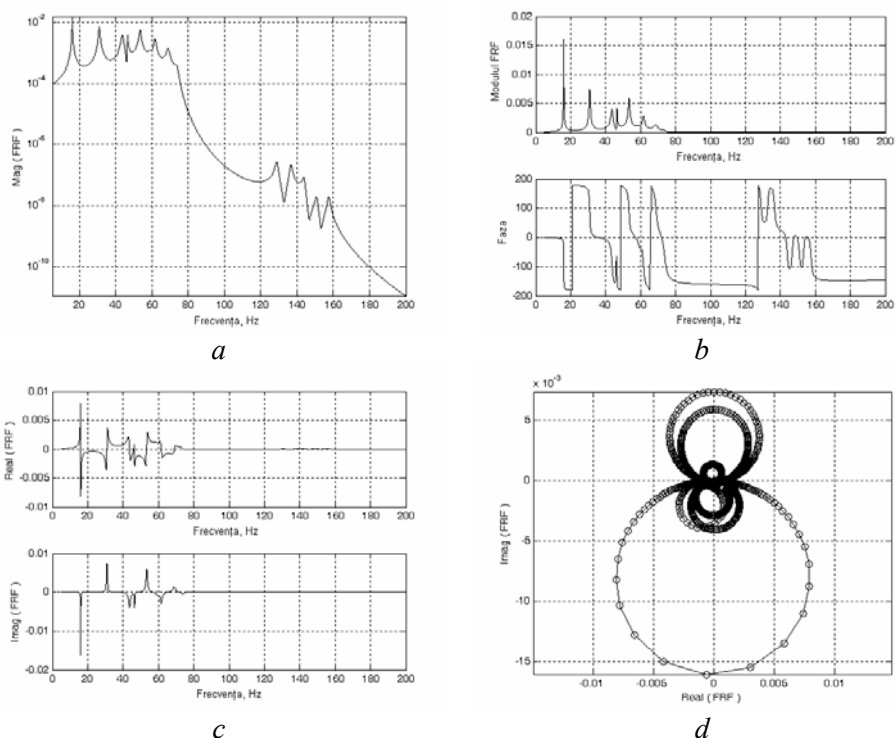


Fig. 4.42

Comparând frecvențele vârfurilor de rezonanță cu frecvențele proprii date în Tabelul 4.2, se remarcă grupul celor mai mari cinci frecvențe proprii, care apar distincte în pofida valorilor reduse ale răspunsului, datorită scării logaritmice (fig. 4.42, a). Dintre celelalte zece rezonanțe, se pot distinge doar nouă, modurile cu frecvențe relativ apropiate la 53,35 Hz și 53,42 Hz producând un singur vârf, în timp ce rezonanțele de la 59,45 Hz și 73,72 Hz sunt aproape estomate.

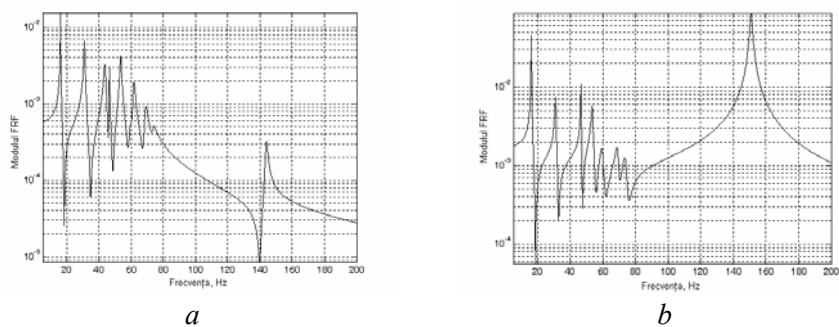


Fig. 4.43

Individualizarea vârfurilor de rezonanță depinde de rezoluția în frecvență a datelor reprezentate grafic. La curbe FRF calculate pentru puncte diferite de răspuns și excitare, de exemplu funcția h_{11} în fig. 4.43, *a* și funcția h_{66} în fig. 4.43, *b*, unele vârfuri pot lipsi.

Probleme

4.E1 Să se calculeze frecvențele proprii și forma modurilor proprii de vibrație ale sistemului din fig. 4.E1. Se consideră $k = 10^6$ N/m, $m_1 = m_4 = m_7 = 0,5$ kg, $m_2 = m_5 = m_9 = 1,5$ kg, $m_3 = m_6 = m_8 = 1$ kg.

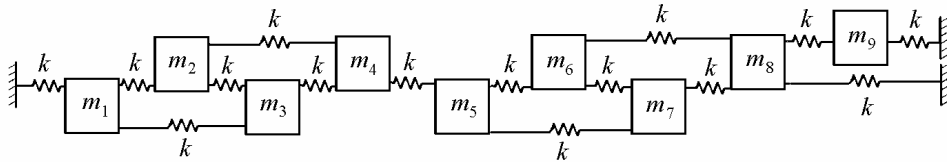


Fig. 4.E1

Răspuns: $f_1 = 73,5$ Hz, $f_2 = 124,62$ Hz, $f_3 = 174,78$ Hz, $f_9 = 433,46$ Hz.

4.E2 Să se calculeze modurile proprii de vibrație ale sistemului din fig. 4.E2, considerând $m_j = 1$ kg ($j = 1, \dots, 12$), $k_j = 100$ N/m ($j = 1, \dots, 11$), $k_{12} = 102$ N/m. Să se compare rezultatele cu cele obținute pentru $k_{12} = 100$ N/m.

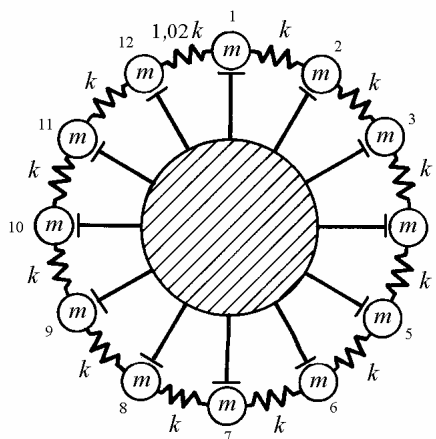


Fig. 4.E2

Răspuns: a) $f_2 = 0,824$ Hz, $f_3 = 0,828$ Hz, $f_4 = 1,591$ Hz, $f_5 = 1,594$ Hz.

b) $f_2 = f_3 = 0,824 \text{ Hz}$, $f_4 = f_5 = 1,591 \text{ Hz}$, $f_6 = f_7 = 2,251 \text{ Hz}$.

4.E3 Să se calculeze frecvențele proprii și rapoartele de amortizare modale ale sistemului cu 10 g.d.l. din fig. 4.E3. Apoi să se calculeze frecvențele proprii neamortizate și formele modale corespunzătoare. Parametrii sistemului sunt: $m_1 = 1,21$, $m_2 = 1,44$, $m_3 = 1,69$, $m_4 = 1,96$, $m_5 = 2,25$, $m_6 = 2,56$, $m_7 = 2,89$, $m_8 = 3,24$, $m_9 = 3,61$, $m_{10} = 4 \text{ kg}$, $k_1 = 1100$, $k_2 = 1200$, $k_3 = 1300$, $k_4 = 1400$, $k_5 = 1500$, $k_6 = 1600$, $k_7 = 1700$, $k_8 = 1800$, $k_9 = 1900$, $k_{10} = 2000 \text{ N/m}$, $c_j = 0,002 k_j$ ($j = 1, \dots, 10$).

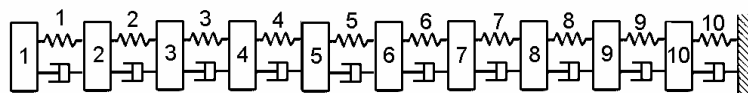


Fig. 4.E3

Răspuns: $f_1 = 0,718 \text{ Hz}$, $\zeta_1 = 0,45\%$, $f_{10} = 8,34 \text{ Hz}$, $\zeta_{10} = 5,24\%$.

4.E4 La sistemul cu 15 g.d.l. din fig. 4.E4 să se calculeze frecvențele proprii amortizate și rapoartele de amortizare modale.

Mase	
0,0013 kg	11-15
0,026 kg	celelalte
Rigidități	
100 N/m	1-17
1100 N/m	18
900 N/m	19
1200 N/m	20
800 N/m	21
Coeficienți de amortizare	
0,1 Ns/m	1-11
0,01 Ns/m	12-21

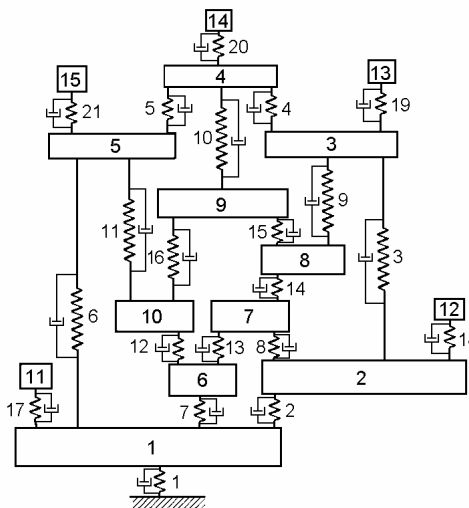


Fig. 4.E4

Răspuns: $f_1 = 2,65 \text{ Hz}$, $\zeta_1 = 0,81\%$, $f_{15} = 156,73 \text{ Hz}$, $\zeta_{15} = 0,44\%$.

4.E5 O structură în formă de scară este fixată la ambele capete ca în fig. 4.E5. Masa fiecărei trepte este m iar rigiditatea laterală între două trepte este k . Să se calculeze pulsațiile proprii și să se traseze forma modurilor proprii de vibrație.

Răspuns: $\omega_1 = 0,517\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$, $\omega_3 = 1,414\sqrt{k/m}$, $\omega_4 = 1,732\sqrt{k/m}$,

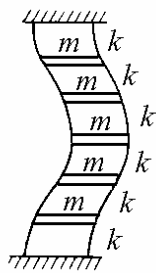


Fig. 4.E5

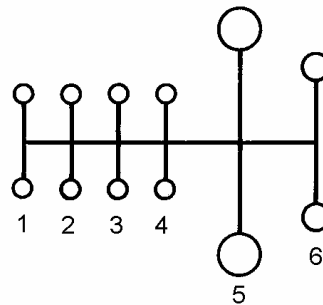


Fig. 4.E6

4.E6 Un motor cu cinci cilindri și volant este folosit la antrenarea unui generator electric. Pentru calculul frecvențelor proprii de torsiune, sistemul real este modelat prin sistemul echivalent prezentat în fig. 4.E6. Să se determine primele patru moduri proprii de vibrație și să se traseze formele modale utilizând următoarele valori: $K_{12} = K_{23} = K_{34} = 2,2 \text{ MNm/rad}$, $K_{45} = 0,9 \text{ MNm/rad}$, $K_{56} = 0,24 \text{ MNm/rad}$, $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0,51 \text{ kg m}^2$, $J_5 = 5,3 \text{ kg m}^2$, $J_6 = 4,4 \text{ kg m}^2$.

Răspuns: $f_2 = 46,21 \text{ Hz}$, $f_3 = 106,11 \text{ Hz}$, $f_4 = 291,41 \text{ Hz}$, $f_5 = 481,45 \text{ Hz}$.

4.E7 Sistemul torsional din fig. 4.E7 modelează un motor diesel cu opt cilindri și volant, transmisia cu roți dințate și elicea vaporului. Să se determine primele trei moduri proprii ale vibrațiilor torsionale utilizând următoarele valori: $n_A = 405 \text{ rot/min}$, $n_B = 225 \text{ rot/min}$, $J_9 = 602 \text{ kg m}^2$, $J_{10} = 91 \text{ kg m}^2$, $J_{11} = 1953 \text{ kg m}^2$, $J_{12} = 4331 \text{ kg m}^2$, $J_1 = J_2 = \dots = J_8 = 184 \text{ kg m}^2$, $K_{89} = 116 \text{ MNm/rad}$, $K_{9,10} = 13,5 \text{ MNm/rad}$, $K_{10,11} = 185 \text{ MNm/rad}$ (redușă la n_B), $K_{11,12} = 0,846 \text{ MNm/rad}$, $K_{12} = K_{23} = \dots = K_{78} = 84 \text{ MNm/rad}$ (G. Ziegler, 1977).

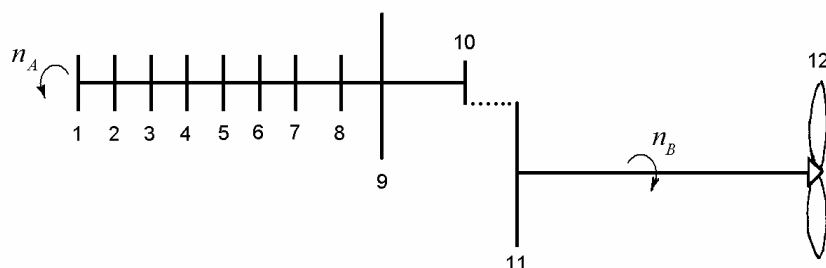


Fig. 4.E7

Răspuns: $f_2 = 2,68 \text{ Hz}$, $f_3 = 20,60 \text{ Hz}$, $f_4 = 35,81 \text{ Hz}$.

4.E8 Să se determine primele două frecvențe proprii (nenule) ale sistemului torsional al unui autovehicul modelat ca în fig. 4.E8, pentru următoarele valori ale momentelor de inerție și rigidităților torsionale: $K_1 = 2 \text{ MNm/rad}$, $K_2 = 1,6 \text{ MNm/rad}$, $K_3 = 1 \text{ MNm/rad}$, $K_4 = 4 \text{ MNm/rad}$, $J_1 = 15 \text{ kg m}^2$, $J_2 = 10 \text{ kg m}^2$, $J_3 = 18 \text{ kg m}^2$, $J_4 = 6 \text{ kg m}^2$. Raportul de transmisie al angrenajului conic din diferențial este $4 : 1$.

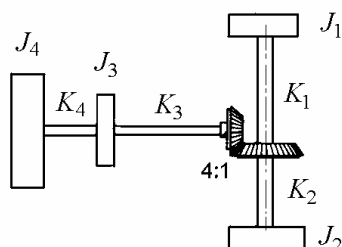


Fig. 4.E8

Răspuns: $f_2 = 55,26 \text{ Hz}$, $f_3 = 62,32 \text{ Hz}$.

4.E9 Sistemul de antrenare a paletelor unui mixer industrial este ilustrat în fig. 4.E9. Roțile conice au fiecare 20 dinți, două roți cilindrice au 36 dinți iar pinionul comun are 12 dinți. Să se calculeze frecvențele proprii ale vibrațiilor torsionale ale sistemului, utilizând valorile $G = 81 \text{ GPa}$, $d = 19 \text{ mm}$, $J_1 = 22,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $J_2 = J_3 = 5,65 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $J_4 = 11,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $J_5 = J_6 = 56,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $J_7 = J_8 = 90,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $\ell_1 = \ell_2 = 0,915 \text{ m}$, $\ell_3 = 1,016 \text{ m}$ (James *et al.*, 1989).

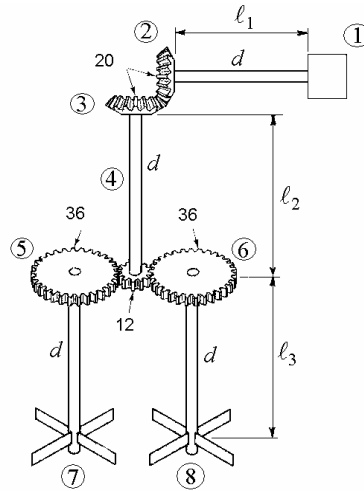


Fig. 4.E9

Răspuns: $f_2 = 16,90 \text{ Hz}$, $f_3 = 18,41 \text{ Hz}$, $f_4 = 37,39 \text{ Hz}$, $f_5 = 79,61 \text{ Hz}$.

4.E10 Să se calculeze modurile proprii ale vibrațiilor laterale ale grinzilor cu masa neglijabilă din fig. 4.E10.

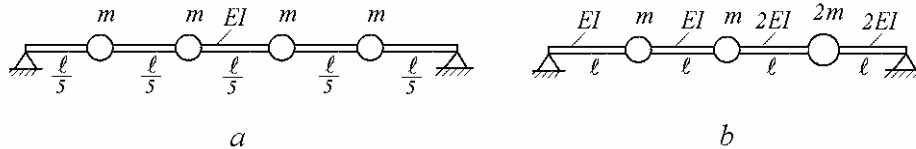


Fig. 4.E10

Răspuns: a) Matricea de flexibilitate este

$$[\delta] = \frac{m \ell^3}{3750EI} \begin{bmatrix} 32 & 45 & 40 & 23 \\ 45 & 72 & 68 & 40 \\ 40 & 68 & 72 & 45 \\ 23 & 40 & 45 & 32 \end{bmatrix}.$$

Pulsațiile proprii sunt $\omega_1 = 4,4126\sqrt{EI/m \ell^3}$, $\omega_2 = 17,611\sqrt{EI/m \ell^3}$, $\omega_3 = 38,986\sqrt{EI/m \ell^3}$, $\omega_4 = 64,1997\sqrt{EI/m \ell^3}$.

b) $\omega_1 = 0,647\sqrt{EI/m \ell^3}$, $\omega_2 = 2,482\sqrt{EI/m \ell^3}$, $\omega_3 = 5,65\sqrt{EI/m \ell^3}$.

4.E11 Să se determine primele opt moduri proprii de vibrație coplanară ale grinzilor cu zăbrele din fig. 4.E11. Barele au secțiunea transversală $\Phi 6 \times 1 \text{ mm}$ și $l = 0,3 \text{ m}$, $E = 72,7 \text{ GPa}$, $\rho = 3100 \text{ kg/m}^3$. Toate masele sunt $m = 0,6 \text{ kg}$.

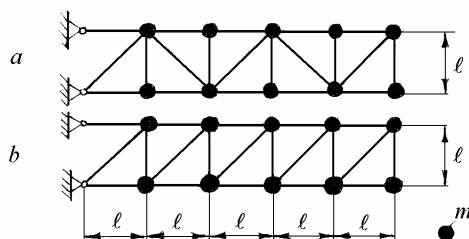


Fig. 4.E11

Răspuns: a) 20,51; 83,31; 111,49; 164,82; 215,10; 265,74; 299,27; 361,48 Hz.

b) 20,02; 79,07; 117,04; 163,05; 231,06; 272,94; 290,24; 358,46 Hz.

4.E12 La grinda cu zăbrele din fig.4.E12 să se determine primele șase frecvențe proprii și formele modale respective, dacă $E = 210 \text{ GPa}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $l = 2 \text{ m}$, $A = 2000 \text{ mm}^2$.

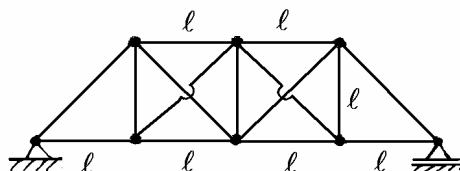


Fig. 4.E12

Răspuns: $f_1 = 74,61 \text{ Hz}$, $f_2 = 142,24 \text{ Hz}$, $f_3 = 237,22 \text{ Hz}$, $f_6 = 529,15 \text{ Hz}$.

4.E13 Să se determine primele 20 moduri proprii de vibrație ale grinzii continue cu patru deschideri egale din fig. 4.E13 și să se comenteze gruparea frecvențelor proprii. Se consideră $E = 208 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $l = 1 \text{ m}$ și secțiune transversală dreptunghiulară cu $b = 2h = 40 \text{ mm}$.

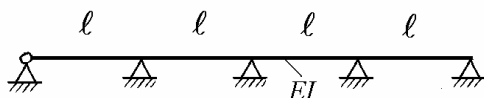
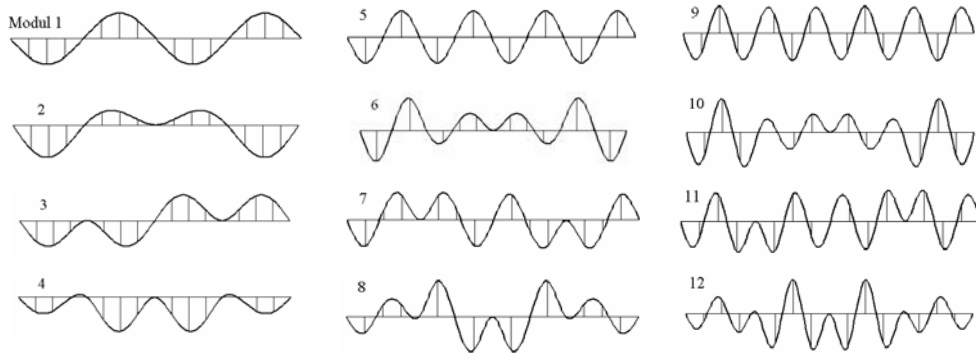


Fig. 4.E13

Răspuns: 46,69; 54,48; 72,98; 94,33 Hz, 187,48; 203,59; 237,82; 274,84 Hz,
427,85; 452,63; 504,23; 557,66 Hz, 829,07; . . . , 1043,98 Hz.



4.E14 O grindă simplu rezemată cu două deschideri (fig. 4.E14) are un arc de răsucire la suportul din mijloc. Rigiditatea acestuia este $K = 500 EI/\ell$, unde EI este modulul de rigiditate la încovoiere al grinzii și ℓ este lungimea totală. a) Să se calculeze modurile proprii ale vibrațiilor transversale ale grinzii cu deschideri de lungimi egale ($\Delta = 0$). Să se comenteze gruparea frecvențelor proprii. b) Se consideră o grindă cvasiperiodică cu cuplaj slab, cu lungimile deschiderilor $\ell(0,5 - \Delta)$ și $\ell(0,5 + \Delta)$, unde $\Delta = 0,01$. Să se explice fenomenul de localizare în structuri mecanice dezordonate. c) Să se extindă analiza la grinzi cvasiperiodice cu trei și patru deschideri.

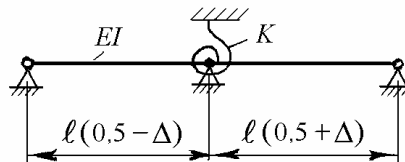


Fig. 4.E14

4.E15 O grindă de secțiune constantă simplu rezemată are lungimea 3 m, masa pe unitatea de lungime 15 kg/m, modulul de rigiditate la încovoiere 4 kNm^2 și $E = 200 \text{ GPa}$. Să se reprezinte grinda prin patru elemente finite și să se calculeze primele patru frecvențe proprii presupunând: a) masa concentrată la mijlocul fiecărui element; b) câte o jumătate din masa fiecărui element plasată la capetele elementului; c) masa uniform distribuită în lungul grinzii (matrice de masă coerentă). Să se compare rezultatele cu cele calculate cu formula lui Rayleigh, utilizând o funcție "sinus" pentru deformata grinzii, și cu formula lui Dunkerley. Să se traseze forma modurilor proprii de vibrație pentru cazul (c).

4.E16 Utilizând metoda elementelor finite, să se calculeze primele două frecvențe proprii ale vibrațiilor transversale ale unei grinzi în consolă, de secțiune constantă. Să se modeleze grinda cu 1, 2, 3, 4, 5 și 6 elemente de lungime egală și să se compare frecvențele proprii astfel obținute cu valorile adevărate.

4.E17 Un arbore din oțel (fig. 4.E17) cu diametrul $d = 40 \text{ mm}$ și lungimea $\ell = 1,2 \text{ m}$ este rezemat în două lagăre de rigidități $k_1 = 4 \text{ N}/\mu\text{m}$ și $k_2 = 6 \text{ N}/\mu\text{m}$. Cele două discuri au masele $m_1 = 400 \text{ kg}$ și $m_2 = 600 \text{ kg}$, și razele de inerție $r_1 = 0,3 \text{ m}$ și respectiv $r_2 = 0,5 \text{ m}$. Să se determine: a) frecvențele proprii ale vibrațiilor laterale, și b) primele patru forme modale, considerând $E = 210 \text{ GPa}$ și $\rho = 7850 \text{ kg}/\text{m}^3$.

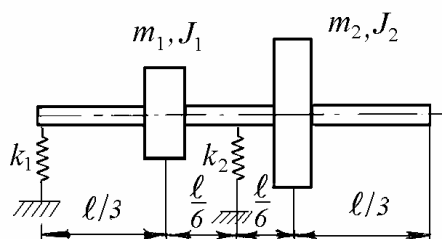
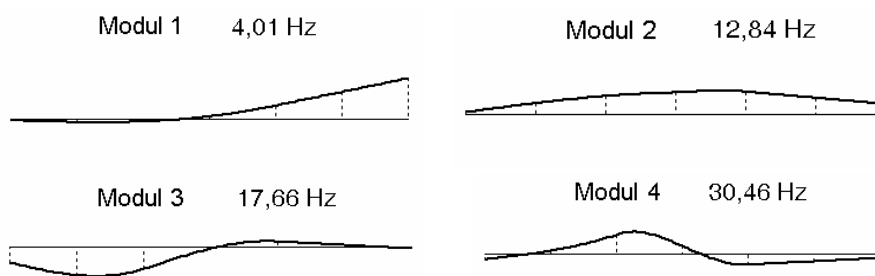


Fig. 4.E17

Răspuns:



4.E18 Arborele din oțel din fig. 4.E18 este simplu rezemat în lagăre scurte. a) Să se calculeze frecvența proprie fundamentală cu formula lui Rayleigh. b) Să se compare rezultatul cu cel obținut utilizând un model cu parametri concentrați. c) Să se calculeze primele două frecvențe proprii cu ajutorul programului VIBFRAME, considerând $E = 210 \text{ GPa}$ și $\rho = 7850 \text{ kg}/\text{m}^3$.

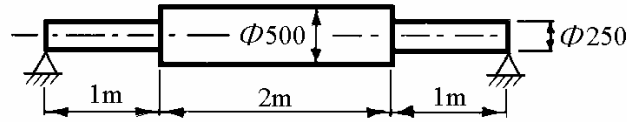


Fig. 4.E18

Răspuns: $f_1 = 36,76 \text{ Hz}$, $f_2 = 120,43 \text{ Hz}$.

4.E19 Să se determine primele două frecvențe proprii ale barei cotite din fig. 4.E19 și să se traseze forma modurilor proprii de vibrație în planul barei. a) Se consideră $AB = CD = \ell$ și $BC = 0$. Cele două bare se modelează fiecare cu cel puțin trei elemente finite. b) Pentru $AB = CD = \ell$ și $BC = \ell/10$ să se compare frecvențele proprii cu cele calculate la (a).

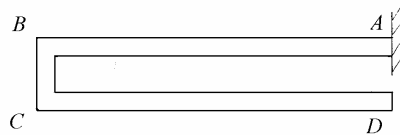
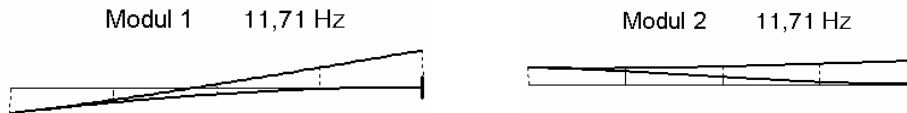


Fig. 4.E19

Răspuns: a) $f_1 = f_2 = 11,71 \text{ Hz}$. b) $f_1 = 10,45 \text{ Hz}$, $f_2 = 10,69 \text{ Hz}$.



4.E20 Să se calculeze primele opt frecvențe proprii și formele modale corespunzătoare pentru vibrațiile coplanare ale cadrului din fig. 4.E20 cu următoarele proprietăți: $A_{vert} = 0,006 \text{ m}^2$, $A_{oriz} = 0,004 \text{ m}^2$, $A_{diag} = 0,003 \text{ m}^2$, $I = 0,0756 \text{ m}^4$, $E = 75 \text{ GPa}$ și $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$.

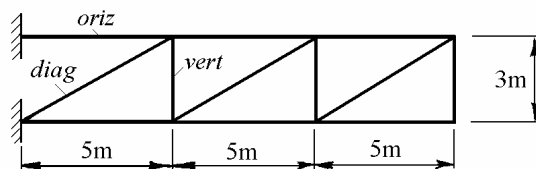


Fig. 4.E20

R. Folosind 48 elemente și 44 noduri (4 elemente pentru o bară), frecvențele proprii sunt 45,15; 79,07; 227,72; 249,94; 365,62; 444,03; 452,83; 476,83 Hz.

4.E21 Să se determine primele 12 moduri proprii ale vibrațiilor laterale coplanare ale crucii duble din fig. 4.E21. Cele opt bare au lungimea $\ell = \sqrt{50}$ m și secțiunea transversală un pătrat cu latura 0,125 m. Capetele exterioare sunt articulate iar cele interioare sunt încastrate într-un punct comun. Proprietățile materialului sunt $E = 200$ GPa și $\rho = 8000$ kg/m³. Se recomandă modelarea fiecărui braț cu mai mult de două elemente finite de tip *beam*.

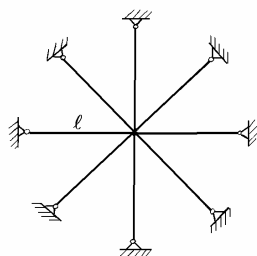
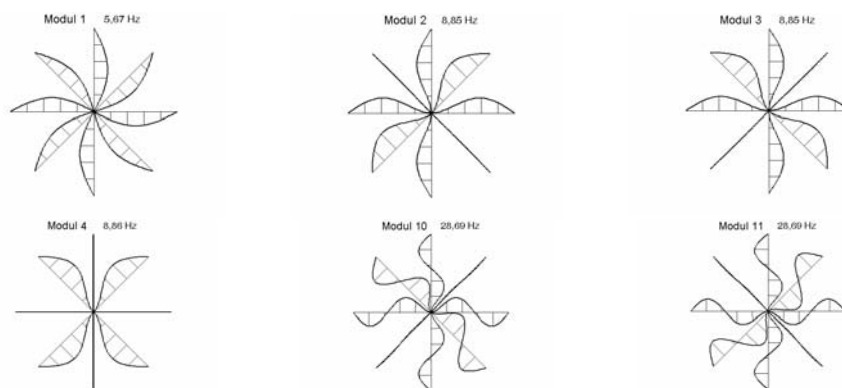


Fig. 4.E21

Răspuns: $f_1 = 5,6687$ Hz, $f_2 = f_3 = 8,8485$ Hz, $f_4 = \dots = f_8 = 8,8856$ Hz.



4.E22 La sistemul din fig. 4.E22, modelat ca grilaj orizontal, să se calculeze primele patru moduri proprii de vibrație. Se consideră $\ell = 0,25$ m, $\ell_1 = 0,2$ m, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$ și $\rho = 7850$ kg/m³. Barele au secțiunea transversală un pătrat cu latura $a = 5$ mm și $I_t = 0,141a^4$.

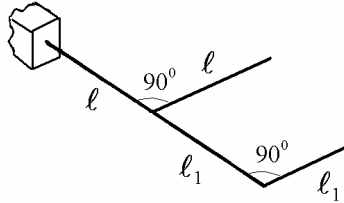
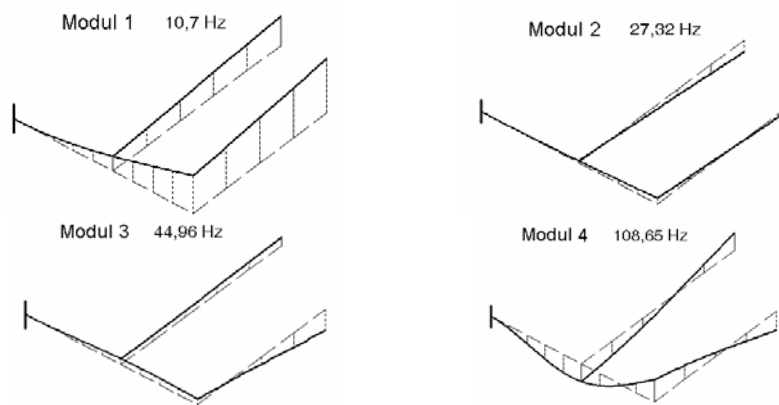


Fig. 4.E22

Răspuns: $f_1 = 10,69 \text{ Hz}$, $f_2 = 27,31 \text{ Hz}$, $f_3 = 44,96 \text{ Hz}$, $f_4 = 108,65 \text{ Hz}$.



4.E23 Să se determine primele șase moduri proprii de vibrație ale grilajului din fig. 4.E23. Se consideră $l = 50 \text{ mm}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ și secțiuni transversale circulare cu diametrul $d = 5 \text{ mm}$.

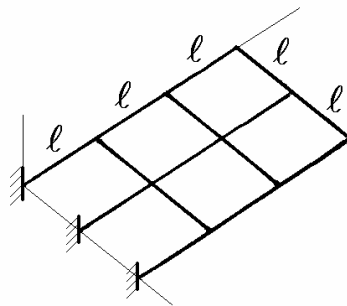
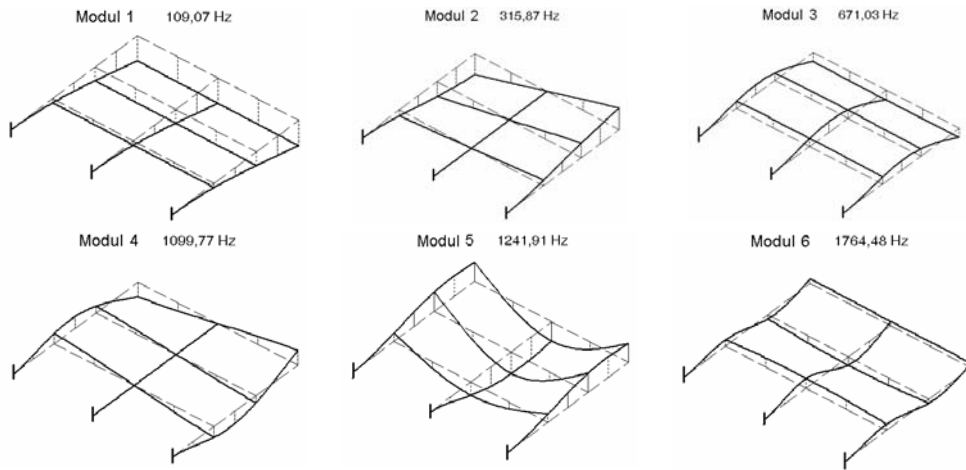


Fig. 4.E23

Răspuns: Primele șase forme modale sunt prezentate în continuare.



4.E24 Grilajul din fig. 4.E24 este realizat astfel: a) o bară orizontală ABC din oțel, cu modulul de rigiditate la încovoiere $2,5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$, modulul de rigiditate la răsucire $1,92 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$ și masa pe unitatea de lungime 300 kg/m ; b) două bare orizontale EBD și GCF din oțel, încastrate rigid în bara ABC , cu modulul de rigiditate la încovoiere $5 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$ și masa pe unitatea de lungime 500 kg/m ; c) mase de 500 kg în E și D , și mase de 250 kg în G și F . Se neglijează momentele de inerție ale acestor mase. Se consideră $E = 210 \text{ GPa}$, $G = 81 \text{ GPa}$ și $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. Se cer primele șase frecvențe proprii de vibrație.

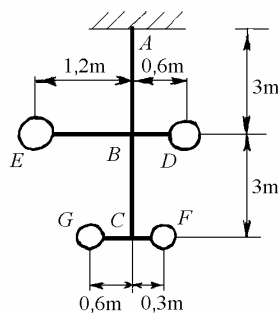


Fig. 4.E24

Răspuns: 2,35; 10,39; 13,39; 36,16; 63,25; 105,22 Hz.

5.

SISTEME CONTINUE

Când masa și elasticitatea unui sistem în vibrație sunt distribuite în tot sistemul, pentru descrierea configurației acestuia este necesar un număr infinit de coordonate. Astfel de sisteme au un număr infinit de grade libertate, deci un număr infinit de frecvențe proprii și forme modale proprii.

În acest capitol se studiază vibrațiile barelor cu masă și elasticitate distribuite, din materiale elastice, omogene și izotrope. Se tratează doar câteva cazuri simple care pot constitui exemple de referință pentru problemele rezolvate cu ajutorul calculatorului numeric. Vibrațiile plăcilor sunt tratate în partea a doua a lucrării.

5.1 Vibrațiile laterale ale barelor zvelte

În continuare se vor adopta ipotezele uzuale din teoria încovoierii simple, denumită curent teoria Bernoulli-Euler a barelor: a) bara este inițial dreaptă; b) grosimea barei este mică în comparație cu raza sa de curbură în secțiunea cu deplasare maximă; c) secțiunile transversale plane rămân plane în toate fazele unei vibrații; d) una dintre axele principale de inerție ale secțiunii este perpendiculară pe direcția mișcării; e) nu există forțe axiale; f) deformațiile transversale datorite forfecării sunt neglijabile; g) masa barei este concentrată în axa neutră. Ultimele două ipoteze arată că se neglijează efectele forfecării și inerției la rotație.

5.1.1 Ecuația diferențială a mișcării

Deplasarea laterală a barei este o funcție de spațiu și de timp, $v = v(x, t)$. Relația între momentul încovoietor și curbură (4.65) devine

$$M(x, t) = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (5.1)$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei și I_z este momentul de inerție axial al secțiunii transversale, față de axa principală de inerție cuprinsă în planul neutru.

Din ecuațiile de echilibru ale unui element de bară infinitezimal (fig. 5.1), se obțin relațiile între momentul încovoietor, forța tăietoare și sarcina distribuită exterioară.

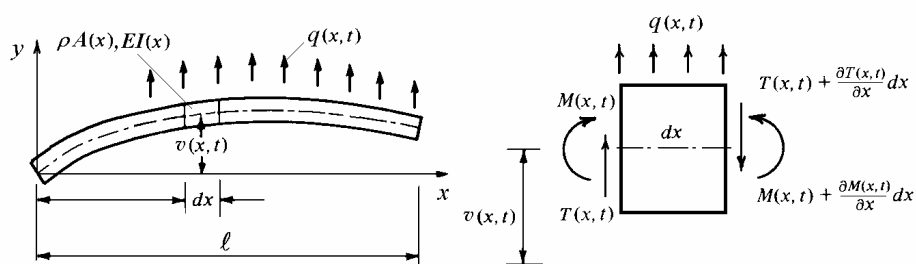


Fig. 5.1

Forța tăietoare este dată de

$$T(x,t) = \frac{\partial M}{\partial x} = EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}. \quad (5.2)$$

Sarcina transversală pe unitatea de lungime este

$$p(x,t) = \frac{\partial T}{\partial x} = EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}. \quad (5.3)$$

Aceasta constă din două componente, sarcina transversală exterioară aplicată barei $q(x,t)$ și sarcina transversală inerțială (masa pe unitatea de lungime înmulțită cu accelerația) $-\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$. Înlocuind

$$p(x,t) = q(x,t) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

în ecuația (5.3) se obține ecuația diferențială a mișcării

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t). \quad (5.4)$$

5.1.2 Moduri proprii de vibrație

În cazul vibrațiilor libere $q(x,t)=0$. Interesează condițiile în care $v(x,t)$ definește o mișcare armonică sincronă

$$v(x,t) = V(x) \sin(\omega t + \phi). \quad (5.5)$$

Înlocuind soluția (5.5) în ecuația (5.4), rezultă pentru $q=0$

$$\frac{d^4 V}{dx^4} - \omega^2 \frac{\rho A}{EI_z} V = 0. \quad (5.6)$$

Ecuația (5.6) este de ordinul patru deci soluția generală (exceptând mișcările de corp rigid) are forma

$$V(x) = B_1 \sin \alpha x + B_2 \cos \alpha x + B_3 \operatorname{sh} \alpha x + B_4 \operatorname{ch} \alpha x \quad (5.7)$$

unde

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI_z}. \quad (5.8)$$

Cele patru constante de integrare se determină din condițiile la limită. Cele trei condiții de rezemare clasice includ: a) capătul simplu rezemat sau articulată, pentru care deplasarea transversală și momentul încovoietor sunt zero; b) capătul încastrat sau fixat, pentru care deplasarea transversală și rotirea (panta liniei elastice) sunt zero; c) capătul liber, pentru care momentul încovoietor și forța tăietoare sunt zero. Pentru o bară de secțiune constantă, aceste condiții se exprimă în funcție de $V(x)$ după cum urmează:

a) La un capăt simplu rezemat:

$$V = 0 \quad \text{și} \quad d^2 V / dx^2 = 0. \quad (5.9)$$

b) La un capăt încastrat:

$$V = 0 \quad \text{și} \quad dV / dx = 0. \quad (5.10)$$

c) La un capăt liber:

$$d^2 V / dx^2 = 0 \quad \text{și} \quad d^3 V / dx^3 = 0. \quad (5.11)$$

Impunând câte două condiții la fiecare capăt se obține un sistem de patru ecuații omogene. Soluția nebanală se obține anulând determinantul coeficienților. Dezvoltarea determinantului conduce la o ecuație transcendentă în $\alpha \ell$ ale cărei soluții înlocuite în (5.8) conduc la expresia pulsațiilor proprii

$$\omega_n = (\alpha_n \ell)^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A \ell^4}}. \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.12)$$

și înlocuite în (5.7) conduc la funcțiile care definesc formele proprii de vibrație.

Deoarece ecuația (5.6) este omogenă, fiecare funcție modală $V_n(x)$ poate descrie doar deplasări relative ale diferitelor secțiuni ale barei, și nu deplasări absolute. La fel ca la sistemele discrete, procesul de atribuire a unor valori absolute funcției $V_n(x)$ se numește *normalizare*, și constă din înmulțirea cu o anumită constantă. Alegerea acestei constante este arbitrară. Astfel, se poate atribui o valoare egală cu 1 deplasării dintr-o anumită secțiune. Pentru reprezentarea grafică a formei mai multor moduri proprii, se dă o valoare egală cu 1 deplasării relative maxime din fiecare mod de vibrație. O altă metodă constă din normalizarea formelor modale astfel încât să aibă o masă modală egală cu 1.

În continuare, se vor determina pulsațiile proprii și formele proprii de vibrație pentru câteva cazuri particulare de rezemare.

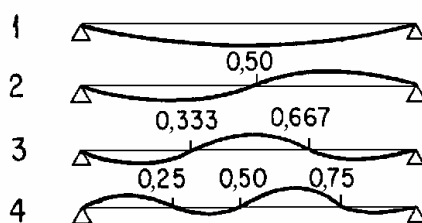


Fig. 5.2

5.1.2.1 Ambele capete simplu rezemate

La o bară simplu rezemată la capete (fig. 5.2), condițiile la limită sunt $V=0$ și $d^2V/dx^2=0$ la $x=0$ și la $x=l$. Înlocuind condițiile la $x=0$ în expresia (5.7) rezultă

$$0 = B_2 + B_4 \text{ și } 0 = -B_2 + B_4.$$

Astfel $B_2 = B_4 = 0$.

Aplicând condițiile la $x=l$, rezultă

$$0 = B_1 \sin \alpha l + B_3 \operatorname{sh} \alpha l \text{ și } 0 = -B_1 \sin \alpha l + B_3 \operatorname{sh} \alpha l.$$

Singura soluție nebanală este $B_3 = 0$ și $\sin \alpha l = 0$, deci

$$\alpha l = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.13)$$

Primele patru rădăcini ale ecuației (5.13) sunt

$$\alpha_n l = 3,142; 6,283; 9,425; 12,566. \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Pentru o bară cu secțiune constantă, simplu rezemată la capete, pulsațiile proprii sunt

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4 \frac{EI_z}{\rho A} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.14)$$

iar formele proprii sunt date de

$$V_n(x) = C \sin \frac{n\pi x}{\ell} ,$$

unde C este o constantă arbitrară.

Formele primelor patru moduri de vibrație, pentru $n = 1, 2, 3, 4$, și pozițiile punctelor nodale corespunzătoare sunt prezentate în fig. 5.2.

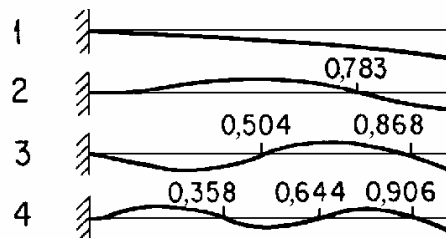


Fig. 5.3

5.1.2.2 Bara în consolă

Alegând originea axei x în încastrare, și aplicând condițiile la limită (5.10) și (5.11), rezultă:

$$\text{La } x=0, V=0, \quad 0 = B_2 + B_4 .$$

$$\text{La } x=0, dV/dx=0. \quad 0 = B_1 + B_3 .$$

$$\text{La } x=\ell, d^2V/dx^2=0.$$

$$0 = -B_1 \sin \alpha \ell - B_2 \cos \alpha \ell + B_3 \text{sh } \alpha \ell + B_4 \text{ch } \alpha \ell .$$

$$\text{La } x=\ell, d^3V/dx^3=0.$$

$$0 = -B_1 \cos \alpha \ell + B_2 \sin \alpha \ell + B_3 \text{ch } \alpha \ell + B_4 \text{sh } \alpha \ell .$$

Cele patru ecuații liniare omogene de mai sus au o soluție nebanală dacă se anulează determinantul coeficienților

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha \ell & -\cos \alpha \ell & \operatorname{sh} \alpha \ell & \operatorname{ch} \alpha \ell \\ -\cos \alpha \ell & \sin \alpha \ell & \operatorname{ch} \alpha \ell & \operatorname{sh} \alpha \ell \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă ecuația pulsațiilor proprii

$$\cos \alpha \ell \cdot \operatorname{ch} \alpha \ell = -1. \quad (5.15)$$

Primele cinci soluții ale ecuației (5.15) sunt

$$\alpha_n \ell = 1,875; \quad 4,694; \quad 7,855; \quad 10,996; \quad 14,137. \quad n = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (5.16)$$

Pentru $n > 5$ valorile soluțiilor pot fi aproximare prin

$$\alpha_n \ell = \frac{2n-1}{2} \pi. \quad (5.16, a)$$

Înlocuind $B_4 = -B_2$ și $B_3 = -B_1$ în ultimele două condiții la limită, rezultă

$$B_1 (\sin \alpha \ell + \operatorname{sh} \alpha \ell) + B_2 (\cos \alpha \ell + \operatorname{ch} \alpha \ell) = 0,$$

$$B_1 (\cos \alpha \ell + \operatorname{ch} \alpha \ell) - B_2 (\sin \alpha \ell - \operatorname{sh} \alpha \ell) = 0.$$

Egalând cu zero determinantul coeficienților ecuațiilor de mai sus se obține ecuația pulsațiilor proprii (5.15). Exprimând B_4 , B_3 și B_2 în funcție de $B_1 = C$, se obține funcția care descrie forma modului de ordinul n

$$V_n(x) = C [\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x - k_n (\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x)] \quad (5.17)$$

unde

$$k_n = \frac{\operatorname{ch} \alpha \ell + \cos \alpha \ell}{\operatorname{sh} \alpha \ell + \sin \alpha \ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.18)$$

Formele primelor patru moduri proprii de vibrație și pozițiile punctelor nodale respective sunt prezentate în fig. 5.3.

5.1.2.3 Bara liberă la capete

La o bară liberă la capete (fig. 5.4), condițiile la limită sunt

$$V''(0) = 0, \quad V'''(0) = 0, \quad V''(\ell) = 0, \quad V'''(\ell) = 0. \quad (5.19)$$

Cu metoda utilizată în exemplele precedente și aplicând condițiile la limită (5.19) se obține ecuația pulsațiilor proprii

$$\cos \alpha \ell \cdot \operatorname{ch} \alpha \ell = +1. \quad (5.20)$$

Primele patru rădăcini ale ecuației (5.20) sunt

$$\alpha_n \ell = 4,730; 7,853; 10,996; 14,137. \quad n=1, 2, 3, 4 \quad (5.21, a)$$

Pentru $n > 4$ valorile soluțiilor pot fi approximate prin

$$\alpha_n \ell = \frac{2n-1}{2} \pi. \quad (5.21, b)$$

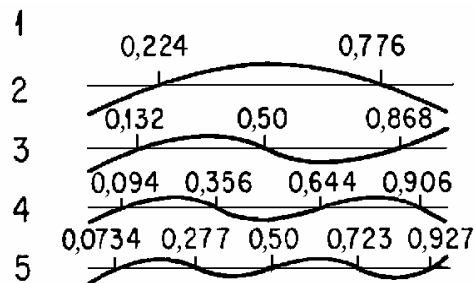


Fig. 5.4

Formele proprii sunt date de

$$V_n(x) = C [\operatorname{sh} \alpha x + \sin \alpha x - k_n (\operatorname{ch} \alpha x + \cos \alpha x)] \quad (5.22)$$

unde

$$k_n = \frac{\operatorname{sh} \alpha \ell - \sin \alpha \ell}{\operatorname{ch} \alpha \ell - \cos \alpha \ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Formele primelor patru moduri proprii de vibrație și pozițiile punctelor nodale respective sunt prezentate în fig. 5.4.

Ecuația (5.6) admite alte două soluții care satisfac condițiile la limită (5.19), anume

$$V(x) = B_5 = \text{const.}, \quad V(x) = B_6 x + B_7.$$

Acestea definesc modurile de vibrație “de corp rigid”. Prima corespunde translației verticale, a doua – rotației în plan vertical, ambele având pulsația proprie nulă.

5.1.2.4 Bara încastrată la capete

La o bară încastrată la ambele capete (fig. 5.5), condițiile la limită sunt

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad V(\ell) = 0, \quad V'(\ell) = 0.$$

Ecuția pulsațiilor proprii este (5.19) iar pulsațiile proprii sunt date de $\alpha_n \ell = 4,730; 7,853; 10,996; 14,137$, pentru $n = 1, 2, 3, 4$, și $\alpha_n \ell = \frac{2n-1}{2} \pi$ pentru $n > 4$.

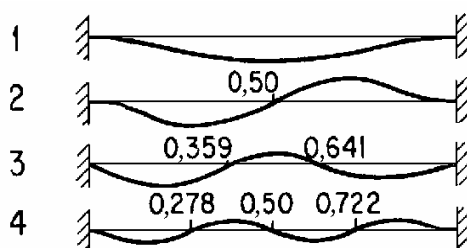


Fig. 5.5

Formele modurilor proprii sunt date de

$$V_n(x) = C [\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x - k_n (\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x)] \quad (5.23)$$

unde

$$k_n = \frac{\operatorname{ch} \alpha \ell - \cos \alpha \ell}{\operatorname{sh} \alpha \ell - \sin \alpha \ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.24)$$

Formele primelor patru moduri proprii de vibrație și pozițiile punctelor nodale corespunzătoare sunt prezentate în fig. 5.5.

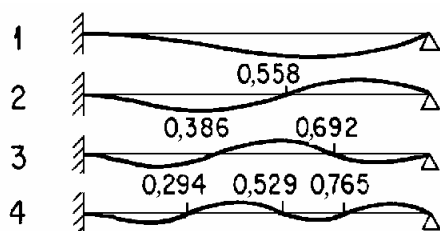


Fig. 5.6

5.1.2.5 Un capăt încastrat și un capăt liber

Când bara este încastrată la un capăt și liberă la celălalt (fig. 5.6), condițiile la limită sunt

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad V(\ell) = 0, \quad V''(\ell) = 0.$$

Ecuția pulsațiilor proprii este

$$\operatorname{th} \alpha \ell = \operatorname{tg} \alpha \ell . \quad (5.25)$$

Primele patru rădăcini ale ecuației (5.25) sunt

$$\alpha_n \ell = 3,927; 7,069; 10,210; 13,352 . \quad n = 1, 2, 3, 4 .$$

Pentru $n > 4$ valorile soluțiilor pot fi aproximare prin

$$\alpha_n \ell = \frac{4n+1}{4} \pi . \quad (5.26)$$

Formele modurilor proprii sunt date de

$$V_n(x) = C [\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x - k_n (\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x)] \quad (5.27)$$

unde

$$k_n = \frac{\operatorname{ch} \alpha \ell - \cos \alpha \ell}{\operatorname{sh} \alpha \ell - \sin \alpha \ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.28)$$

Formele primelor patru moduri proprii de vibrație și pozițiile punctelor nodale corespunzătoare sunt prezentate în fig. 5.6.

5.1.3 Ortogonalitatea funcțiilor proprii

Ca la toate sistemele vibratoare neamortizate, funcțiile proprii ale barelor cu masă și elasticitate distribuite sunt ortogonale. În cazul general al barelor cu secțiune variabilă, acestea sunt ortogonale în raport cu o funcție de ponderare $m(x)$, unde $m(x) = \rho A(x)$ este masa pe unitatea de lungime. Modulul de rigiditate la încovoire se notează $EI(x)$.

Considerând modurile de indice r și s , se poate scrie

$$(EIV_r'')'' - \omega_r^2 m V_r = 0, \quad (5.29)$$

$$(EIV_s'')'' - \omega_s^2 m V_s = 0. \quad (5.30)$$

Înmulțind ecuațiile (5.29) și (5.30) cu V_s și respectiv V_r , și integrând de la 0 la ℓ rezultă

$$\int_0^{\ell} (EIV_r'')'' V_s dx = \omega_r^2 \int_0^{\ell} V_r V_s m dx, \quad (5.31)$$

$$\int_0^{\ell} (EIV_s'')'' V_r dx = \omega_s^2 \int_0^{\ell} V_s V_r m dx. \quad (5.32)$$

Scăzând ecuația (5.32) din (5.31) rezultă

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^\ell V_s V_r m dx = \int_0^\ell [(EIV_r'')'' V_s - (EIV_s'')'' V_r] dx. \quad (5.33)$$

Integrând prin părți membrul drept al ecuației (5.33) se obține

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^\ell V_s V_r m dx = \{ [V_s (EIV_r'')' - V_r (EIV_s'')'] - EI (V_s' V_r'' - V_r' V_s'') \}_0^\ell. \quad (5.34)$$

Membrul drept al ecuației (5.34) se anulează dacă, la capetele barei, se aplică cel puțin una dintre următoarele perechi de condiții la limită:

$$\begin{aligned} V &= 0, & V' &= 0, \\ V &= 0, & EIV'' &= 0, \\ V' &= 0, & (EIV'')' &= 0, \\ EIV'' &= 0, & (EIV'')' &= 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Presupunând că una dintre perechile de condiții la limită de mai sus se aplică la fiecare din capete barei, ecuația (5.34) se reduce la

$$\int_0^\ell m(x) V_r(x) V_s(x) dx = 0, \quad r \neq s. \quad (5.36)$$

Ecuațiile de tipul (5.36) se numesc *relații de ortogonalitate* între funcțiile proprii ale barei. Se spune că funcțiile $V_r(x)$ și $V_s(x)$ sunt ortogonale (între ele) în raport cu funcția de ponderare $m(x)$.

La o bară de secțiune constantă, relația (5.36) devine

$$\int_0^\ell V_r(x) V_s(x) dx = 0, \quad r \neq s. \quad (5.36, a)$$

De asemenea, la o bară cu o combinație oarecare între condițiile la limită de mai sus (simplu rezemată, încastrată sau liberă)

$$\int_0^\ell EI(x) V_r''(x) V_s''(x) dx = 0, \quad r \neq s.$$

Relațiile (5.36) pot fi utilizate la determinarea răspunsului liber cu condiții inițiale date.

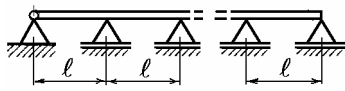
5.1.4 Grinzi continue

La calculul pulsațiilor proprii ale barelor pe mai multe reazeme, tronsonul dintre două reazeme este considerat ca o bară separată, cu originea în reazemul din stânga. Ecuația (5.7) se aplică fiecărui tronson.

La capetele barei, sunt aplicabile condițiile la limită corespunzătoare tipului de rezemare. Pe fiecare reazem intermediar săgeata este nulă. Deoarece bara este continuă, pantele și momentele încovoietoare la stânga și la dreapta reazemelor intermediare sunt egale. Saltul forței tăietoare este egal cu reacțiunea din reazem.

În Tabelul 5.1 se dau valorile lui $\alpha_n \ell$ din relația (5.12) pentru calculul primelor cinci pulsații proprii ale grinzilor continue de secțiune constantă și cu deschideri egale.

Tabelul 5.1

Configurația barei	Număr de deschideri	Modul				
		1	2	3	4	5
		Rădăcinile ecuație caracteristice				
	1	3,142	6,283	9,425	12,566	15,708
	2	3,142	3,927	6,283	7,069	9,425
	3	3,142	3,550	4,304	6,283	6,692
	4	3,142	3,393	3,927	4,461	6,283
	5	3,142	3,299	3,707	4,147	4,555
	6	3,142	3,267	3,550	3,927	4,304
	7	3,142	3,236	3,456	3,770	4,084
	8	3,142	3,205	3,393	3,644	3,927
	9	3,142	3,205	3,330	3,550	3,801
	10	3,142	3,205	3,299	3,487	3,707
	11	3,142	3,173	3,267	3,424	3,613
	12	3,142	3,173	3,267	3,393	3,550

Pulsațiile proprii ale grinzilor continue cu deschideri egale formează grupuri cu valori apropiate între ele, numărul pulsațiilor dintr-un grup fiind egal cu numărul deschiderilor barei. Aceasta este o proprietate a așa-numitelor “sisteme periodice”. În fig. 5.7 se prezintă formele modurilor proprii de vibrație pentru primul grup de pulsații proprii plus prima pulsație proprie din grupul următor la grinzi continue cu două, trei, patru și respectiv cinci deschideri egale.

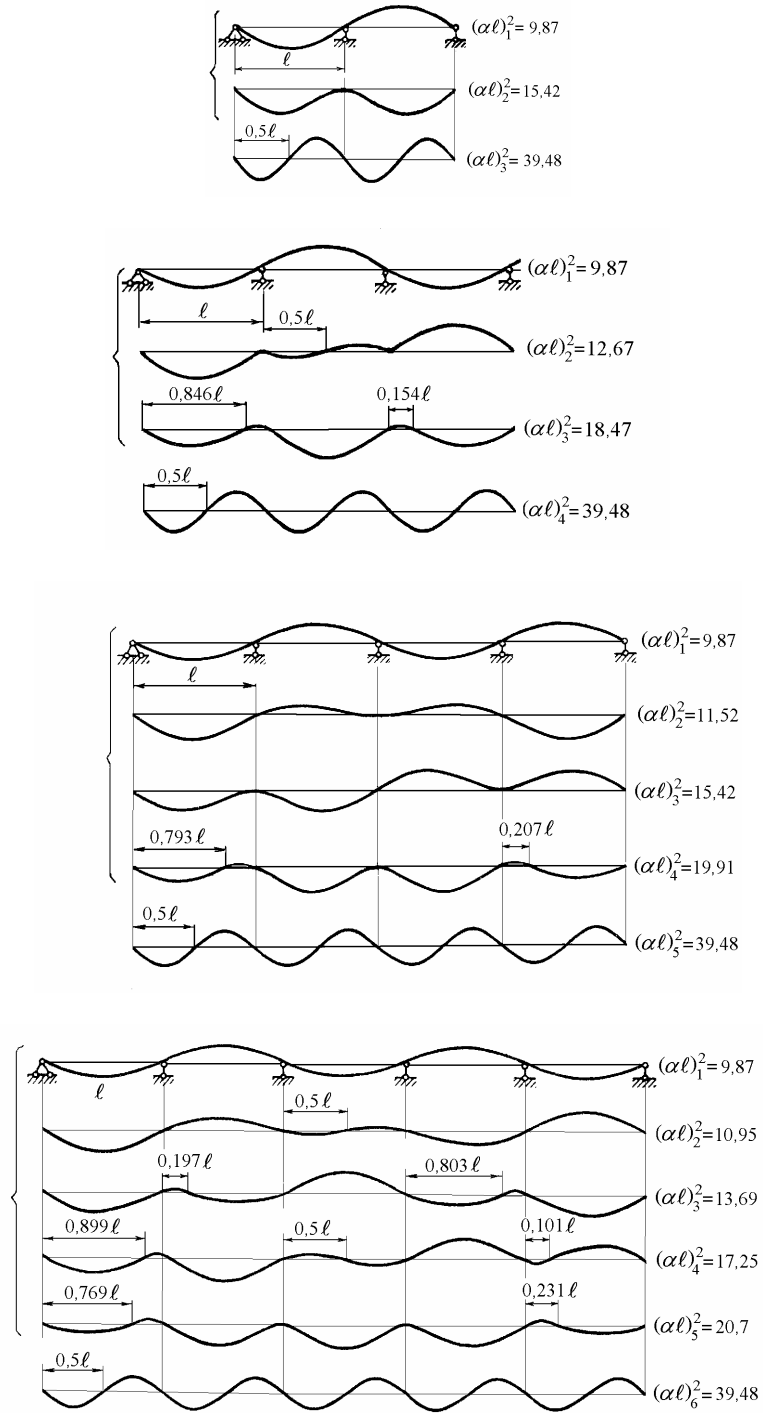


Fig. 5.7

Exemplul 5.1

Să se stabilească ecuația pulsațiilor proprii la o bară cu două deschideri inegale, simplu rezemată la capete.

Rezolvare. Pentru primul tronson, de lungime ℓ_1 , soluția (5.7) se scrie

$$V_1(x_1) = A_1 \sin \alpha x_1 + B_1 \cos \alpha x_1 + C_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 + D_1 \operatorname{ch} \alpha x_1$$

iar pentru al doilea tronson, de lungime ℓ_2 , are forma

$$V_2(x_2) = A_2 \sin \alpha x_2 + B_2 \cos \alpha x_2 + C_2 \operatorname{sh} \alpha x_2 + D_2 \operatorname{ch} \alpha x_2.$$

Pe baza condițiilor la limită și de continuitate

$$V_1(0) = V_1''(0) = 0, \quad V_1(\ell_1) = V_2(0) = 0, \quad V_1'(\ell_1) = V_2'(0),$$

$$V_1''(\ell_1) = V_2''(0), \quad V_2(\ell_2) = V_2''(\ell_2) = 0$$

se stabilesc următoarele cinci relații între constantele de integrare

$$A_1 \sin \alpha \ell_1 + C_1 \operatorname{sh} \alpha \ell_1 = 0,$$

$$A_1 \cos \alpha \ell_1 + C_1 \operatorname{ch} \alpha \ell_1 - A_2 - C_2 = 0,$$

$$-A_1 \sin \alpha \ell_1 + C_1 \operatorname{sh} \alpha \ell_1 - 2D_2 = 0,$$

$$A_2 \sin \alpha \ell_2 + C_2 \operatorname{sh} \alpha \ell_2 + D_2 (\operatorname{ch} \alpha \ell_2 - \cos \alpha \ell_2) = 0,$$

$$-A_2 \sin \alpha \ell_2 + C_2 \operatorname{ch} \alpha \ell_2 + D_2 (\operatorname{ch} \alpha \ell_2 + \cos \alpha \ell_2) = 0.$$

Sistemul de ecuații de mai sus are soluții nebanale dacă determinantul coeficienților necunoscutelor A_1 , C_1 , A_2 , C_2 și D_2 este egal cu zero. Din această condiție se obține ecuația pulsațiilor proprii

$$\operatorname{sh} \mu \alpha \ell \cdot \operatorname{sh} (1 - \mu) \alpha \ell \cdot \sin \alpha \ell - \sin \mu \alpha \ell \cdot \sin (1 - \mu) \alpha \ell \cdot \operatorname{sh} \alpha \ell = 0,$$

în care s-a notat $\mu = \ell_1/\ell$ și $\ell = \ell_1 + \ell_2$.

5.1.5 Condiții la limită naturale

Efectul forțelor și momentelor concentrate, al reazemelor elastice și al maselor concentrate poate fi introdus prin condițiile la limită *naturale* bazate pe ecuațiile (5.1) și (5.2), care definesc momentul încovoietor și forța tăietoare în secțiunea respectivă. După caz, acestea sunt utilizate împreună cu condițiile la limită *geometrice*, care definesc deplasarea laterală (săgeata) și panta liniei elastice (rotirea secțiunii).

5.1.5.1 Forțe și momente concentrate

Condițiile la limită naturală se stabilesc cel mai ușor pe baza *condițiilor de continuitate* care definesc saltul momentului încovoietor și al forței tăietoare în secțiunile unde sunt aplicate un moment concentrat sau o forță concentrată.

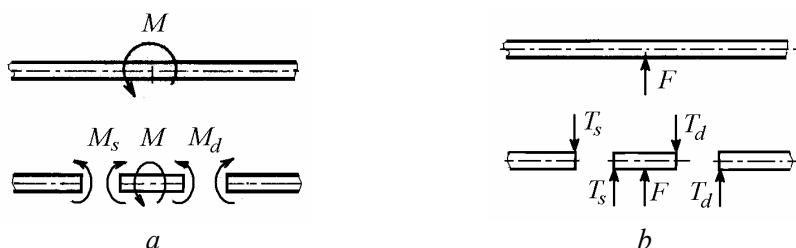


Fig. 5.8

Din fig. 5.8, *a* rezultă relația între momentele încovoietoare la dreapta M_d și la stânga M_s secțiunii în care se aplică momentul M

$$M_d = M_s - M . \quad (5.37)$$

Din fig. 5.8, *b* rezultă relația între forțele tăietoare la dreapta T_d și la stânga T_s secțiunii în care se aplică forța F

$$T_d = T_s + F . \quad (5.38)$$

Dacă relațiile (5.37) și (5.38) se aplică la capătul din stânga al unei bare, atunci $M_s = 0$ și $T_s = 0$, iar dacă se aplică la capătul din dreapta, atunci $M_d = 0$ și $T_d = 0$.

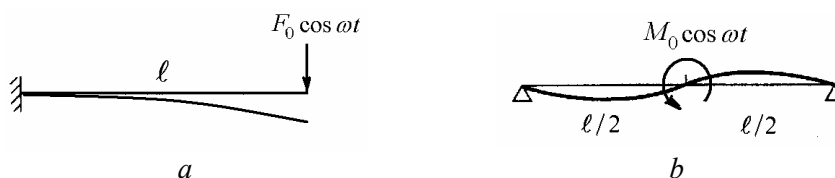


Fig. 5.9

Astfel, la bara din fig. 5.9, *a*, la capătul din dreapta $M = 0$ și $F = -F_0 \cos \omega t$, deci condițiile la limită se scriu

$$\begin{aligned} EI v''(\ell) &= M(\ell) = 0, \\ EI v'''(\ell) &= T(\ell) = -F = F_0 \cos \omega t, \quad v'''(\ell) = \frac{F_0}{EI} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.39)$$

La bara din fig. 5.9, *b*, la mijlocul barei, condițiile la limită sunt

$$v'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0, \quad (5.40)$$

$$EIv''\left(\frac{\ell}{2}\right) = M\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{M}{2} = -\frac{M_0}{2} \cos \omega t, \quad v''\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{M_0}{2EI} \cos \omega t.$$

5.1.5.2 Reazeme elastice

În reazemele elastice liniare, reacțiunile sunt proporționale cu deplasările corespunzătoare. La un arc de translație de rigiditate k , forța este proporțională cu săgeata, $F = -kv$. La un arc de rotație de rigiditate K , momentul este proporțional cu rotirea, $M = -Kv'$.

Condițiile de continuitate (5.37) și (5.38) se scriu

$$EIv_d''' = EIv_s''' - kv, \quad (5.41)$$

$$EIv_d'' = EIv_s'' + Kv'. \quad (5.42)$$

Acestea se particularizează la capetele barei prin anularea termenului respectiv. Pentru capătul din stânga condițiile la limită sunt date în fig. 5.10, *a* iar pentru capătul din dreapta – în fig. 5.10, *b*.

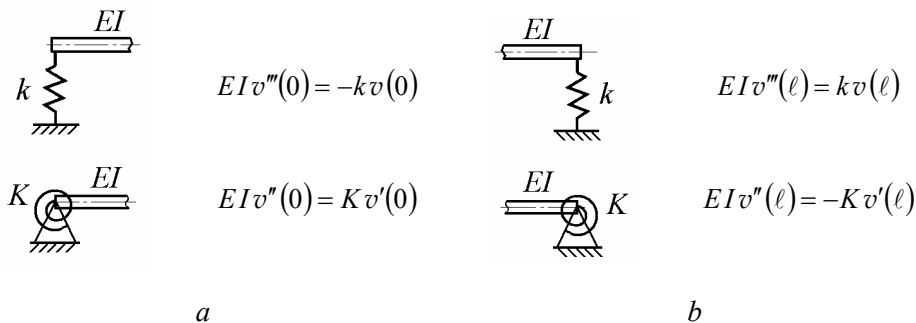


Fig. 5.10

5.1.5.3 Mase concentrate

Pentru o greutate atașată barei, de masă m și moment de inerție masic J , condițiile de continuitate (5.37) și (5.38) se scriu

$$EIv_d''' = EIv_s''' - m\ddot{v}, \quad (5.43)$$

$$EIv_d'' = EIv_s'' + J\ddot{v}'. \quad (5.44)$$

Exprimând accelerațiile în funcție de deplasări, rezultă

$$EIv_d''' = EIv_s''' + m\omega^2 v, \quad (5.43,a)$$

$$EIv_d'' = EIv_s'' - J\omega^2 v'. \quad (5.44,a)$$

Înlocuind ω^2 din relația (5.8), se obține

$$\frac{1}{\alpha^3} v_d''' = \frac{1}{\alpha^3} v_s''' + (\alpha\ell) \frac{m}{\rho A\ell} v, \quad (5.43,b)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} v_d'' = \frac{1}{\alpha^2} v_s'' - (\alpha\ell)^3 \frac{J}{\rho A\ell^3} \frac{1}{\alpha} v'. \quad (5.44,b)$$

Relațiile de continuitate se particularizează la capetele barei prin anularea termenului respectiv. Pentru capătul din stânga condițiile la limită sunt date în fig. 5.11, *a* iar pentru capătul din dreapta – în fig. 5.11, *b*.

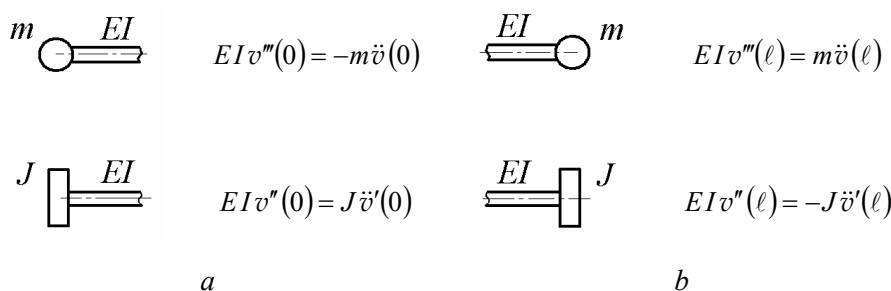


Fig. 5.11

Exemplul 5.2

O bară prismatică cu lungimea ℓ și modulul de rigiditate la încovoiere EI este articulată la un capăt și simplu rezemată pe un arc de rigiditate k – la celălalt capăt (fig. 5.12). Să se determine ecuația pulsațiilor proprii ale vibrațiilor transversale ale barei și primele două pulsații proprii pentru cazul când $\frac{k\ell^3}{EI} = 1$.

Rezolvare. Se utilizează soluția ecuației de mișcare (5.7). La $x=0$, săgeata și momentul încovoiator sunt nule, $V(0)=0$ și $V''(0)=0$. Rezultă $B_2 = B_4 = 0$.

La $x=\ell$, momentul încovoiator este zero iar forța tăietoare este forța din arc, proporțională cu săgeata, $V''(\ell)=0$ și $V'''(\ell) = \frac{k}{EI}V(\ell)$. Rezultă un sistem

algebric omogen cu necunoscutele B_1 și B_3 . Anulând determinantul coeficienților se obține ecuația pulsațiilor proprii

$$\frac{\sin \alpha \ell \operatorname{ch} \alpha \ell - \cos \alpha \ell \operatorname{sh} \alpha \ell}{2 \sin \alpha \ell \operatorname{sh} \alpha \ell} (\alpha \ell)^3 = \frac{k \ell^3}{EI}. \quad (5.45)$$

Pentru $\frac{k \ell^3}{EI} = 1$, rezultă $(\alpha \ell)_1 = 1,310$ și $(\alpha \ell)_2 = 3,943$, deci primele două pulsații proprii sunt

$$\omega_1 = \frac{1,716}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \omega_2 = \frac{15,547}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$

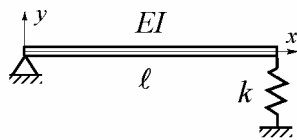


Fig. 5.12

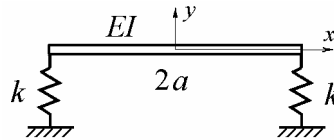


Fig. 5.13

Exemplul 5.3

Să se determine ecuația pulsațiilor proprii ale vibrațiilor transversale ale unei bare cu lungimea $2a$ și modulul de rigiditate la încovoiere EI , rezemată la capete pe arcuri de rigiditate k (fig. 5.13).

Rezolvare. Se utilizează soluția ecuației de mișcare (5.7). Cu originea axelor de coordonate la mijlocul barei, condițiile la limită se aplică pentru jumătatea din dreapta a barei.

Pentru modurile simetrice de vibrație, la $x=0$, panta și forța tăietoare sunt nule, $V'(0)=0$ și $V''(0)=0$. Rezultă $B_1 = B_3 = 0$.

La $x=a$, momentul încovoiator este zero iar forța tăietoare este forța din arc, proporțională cu săgeata, $V''(a)=0$ și $V'(a) = \frac{k}{EI} V(a)$. Rezultă

$$-B_2 \cos \alpha a + B_4 \operatorname{ch} \alpha a = 0,$$

$$\alpha^3 (B_2 \sin \alpha a + B_4 \operatorname{sh} \alpha a) = \frac{k}{EI} (B_2 \cos \alpha a + B_4 \operatorname{ch} \alpha a).$$

Anulând determinantul coeficienților lui B_2 și B_4 se obține ecuația pulsațiilor proprii ale modurilor simetrice de vibrație

$$\frac{\sin \alpha a \operatorname{ch} \alpha a + \cos \alpha a \operatorname{sh} \alpha a}{2 \cos \alpha a \operatorname{ch} \alpha a} (\alpha a)^3 = \frac{k a^3}{EI}. \quad (5.46)$$

Aceasta corespunde barei încastrate în capătul din stânga și rezemate elastic în capătul din dreapta.

Pentru $k = 0$, din (5.46) rezultă ecuația pulsațiilor proprii pentru modurile simetrice ale barei libere la capete

$$\operatorname{tg} \alpha a + \operatorname{th} \alpha a = 0.$$

Pentru $k \rightarrow \infty$, din (5.46) se obține ecuația pulsațiilor proprii pentru modurile simetrice ale barei simplu rezemate la capete

$$\cos \alpha a = 0.$$

Pentru modurile antisimetrice de vibrație, la $x = 0$, săgeata și momentul încovoietor sunt nule, $V(0) = 0$ și $V''(0) = 0$, ca la problema precedentă. Deci ecuația pulsațiilor proprii pentru modurile antisimetrice se obține din (5.45) înlocuind $\ell = a$.

Pentru $k = 0$, rezultă $\operatorname{tg} \alpha a - \operatorname{th} \alpha a = 0$, iar pentru $k \rightarrow \infty$, se obține $\sin \alpha a = 0$.

Exemplul 5.4

O bară în consolă, cu lungimea ℓ , modulul de rigiditate la încovoiere EI și masa pe unitatea de lungime ρA , are atașată în capătul liber o greutate de masă m și moment de inerție masic J (fig. 5.14). Să se determine ecuația pulsațiilor proprii ale vibrațiilor transversale ale barei.

Rezolvare. Se utilizează soluția ecuației de mișcare (5.7). În încastrare, la $x = 0$, săgeata și rotirea sunt nule, $V(0) = 0$ și $V'(0) = 0$. Rezultă $B_4 = -B_2$ și $B_3 = -B_1$.

La $x = \ell$, condițiile la limită se scriu

$$\frac{1}{\alpha^3} V'''(\ell) = -\mu (\alpha \ell) V(\ell),$$

$$\frac{1}{\alpha^2} V''(\ell) = \beta (\alpha \ell)^3 \frac{1}{\alpha} V'(\ell),$$

unde s-a notat

$$\mu = \frac{m}{\rho A \ell}, \quad \beta = \frac{J}{\rho A \ell^3}.$$

Rezultă un sistem algebric omogen cu variabilele B_1 și B_2 . Anulând determinantul coeficienților se obține ecuația pulsațiilor proprii

$$1 - \mu\beta(\alpha l)^4 + \frac{1 + \mu\beta(\alpha l)^4}{\cos\alpha l \operatorname{ch}\alpha l} - \mu(\alpha l)(\operatorname{tg}\alpha l - \operatorname{th}\alpha l) - \beta(\alpha l)^3(\operatorname{tg}\alpha l - \operatorname{th}\alpha l) = 0.$$

Prin particularizare, înlocuind $\beta = 0$, se obține ecuația pentru bara cu o masă concentrată, cu moment de inerție neglijabil

$$\frac{1 + \cos\alpha l \operatorname{ch}\alpha l}{\sin\alpha l \operatorname{ch}\alpha l - \cos\alpha l \operatorname{sh}\alpha l} \frac{1}{\alpha l} = \mu. \quad (5.47)$$

Pentru $\beta = 0$ și $\mu = 0$ rezultă ecuația pulsațiilor proprii ale barei fără masă în capăt (5.15).

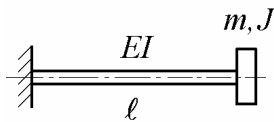


Fig. 5.14

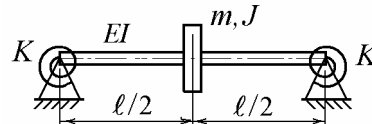


Fig. 5.15

Exemplul 5.5

O bară cu lungimea l , modulul de rigiditate la încovoiere EI și masa pe unitatea de lungime ρA , este rezemată la capete pe arcuri torsionale de rigiditate K și are atașată la mijloc o greutate de masă m și moment de inerție masic J (fig. 5.15). Să se determine ecuațiile pulsațiilor proprii ale vibrațiilor transversale simetrice și antisimetrice ale barei.

Rezolvare. Ecuația pulsațiilor proprii ale modurilor simetrice de vibrație este

$$\frac{m}{\rho A l} \frac{\alpha l}{2} \left(\operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \right) + \frac{K l}{2EI} \left[\frac{m}{\rho A l} \left(1 - \sec \frac{\alpha l}{2} \operatorname{sech} \frac{\alpha l}{2} \right) + \frac{2}{\alpha l} \left(\operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \right) \right] = -2.$$

Ecuația pulsațiilor proprii ale modurilor antisimetrice de vibrație este

$$\sin \frac{\alpha l}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha l}{2} \left\{ 2 + \left[\left(\frac{\alpha l}{2} \right)^3 \frac{4J}{\rho A l^3} - \frac{K l}{2EI} \left(\frac{2}{\alpha l} \right) \right] \left(\cotg \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{coth} \frac{\alpha l}{2} \right) \right\} + \frac{K l}{2EI} \frac{4J}{\rho A l^3} \left(\frac{\alpha l}{2} \right)^2 \left(\cos \frac{\alpha l}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2} - 1 \right) = 0.$$

5.1.6 Răspunsul la excitație armonică

La o bară solicitată de o forță sau un cuplu cu variație armonică în timp, răspunsul dinamic poate fi calculat utilizând soluția pentru bara fără sarcină exterioară distribuită, introducând excitația printr-o condiție la limită.

Pentru exemplificare se consideră o bară liberă la capete.

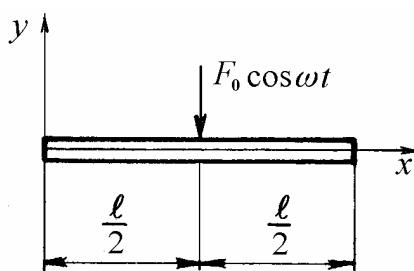


Fig. 5.16

Încărcare simetrică

Se consideră o bară liberă la capete, acționată de o forță armonică $F_0 \sin \omega t$ aplicată la mijlocul barei (fig. 5.16).

În regim staționar, soluția se alege de forma

$$v(x, t) = Y(x) \cos \omega t, \quad (5.48)$$

în care ω este pulsația excitatoare. Din relația (5.4) rezultă

$$Y(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x \quad (5.49)$$

unde

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI_z}. \quad (5.50)$$

Pentru jumătatea din stânga a barei, condițiile la limită sunt

$$Y''(0) = 0, \quad Y'''(0) = 0, \quad Y'(\ell/2) = 0, \quad EIY'''(\ell/2) = F_0/2. \quad (5.51)$$

Amplitudinea vibrațiilor forțate într-o secțiune $0 \leq x \leq \ell/2$ este

$$Y(x) = \frac{F_0}{4EI\alpha^3} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha\ell}{2} - \sin \frac{\alpha\ell}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha\ell}{2} \sin \frac{\alpha\ell}{2} + \cos \frac{\alpha\ell}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha\ell}{2}} (\sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x) - \frac{\cos \frac{\alpha\ell}{2} + \operatorname{ch} \frac{\alpha\ell}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha\ell}{2} \sin \frac{\alpha\ell}{2} + \cos \frac{\alpha\ell}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha\ell}{2}} (\cos \alpha x + \operatorname{ch} \alpha x) \right] \quad (5.52)$$

Săgeata dinamică la mijlocul barei este

$$Y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F_0 \ell^3}{16EI} \left(\frac{2}{\alpha\ell}\right)^3 \frac{1 + \cos \frac{\alpha\ell}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha\ell}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha\ell}{2} \sin \frac{\alpha\ell}{2} + \cos \frac{\alpha\ell}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha\ell}{2}}. \quad (5.53)$$

Anulând numitorul expresiei (5.53) se obțin pulsațiile de rezonanță. Rezultă ecuația

$$\operatorname{th} \frac{\alpha\ell}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha\ell}{2} = 0. \quad (5.54)$$

Primele trei rădăcini ale ecuației (5.54) sunt

$$\alpha_n \ell / 2 = 2,365; \quad 5,498; \quad 8,639. \quad n = 1, 2, 3.$$

Valorile

$$(\alpha\ell)_{1s} = 4,730; \quad (\alpha\ell)_{2s} = 10,996; \quad (\alpha\ell)_{3s} = 17,278; \quad (5.55)$$

sunt rădăcinile ecuației (5.20) corespunzătoare modurilor simetrice de vibrație.

Anulând numărătorul expresiei (5.53) se obțin pulsațiile de antirezonanță. Rezultă ecuația

$$1 + \cos \frac{\alpha\ell}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha\ell}{2} = 0, \quad (5.56)$$

ale cărei prime trei rădăcini sunt

$$\alpha_n \ell / 2 = 1,875; \quad 4,694; \quad 7,855; \quad n = 1, 2, 3,$$

sau

$$(\alpha\ell)^{(1)} = 3,750; \quad (\alpha\ell)^{(2)} = 9,388; \quad (\alpha\ell)^{(3)} = 15,710.$$

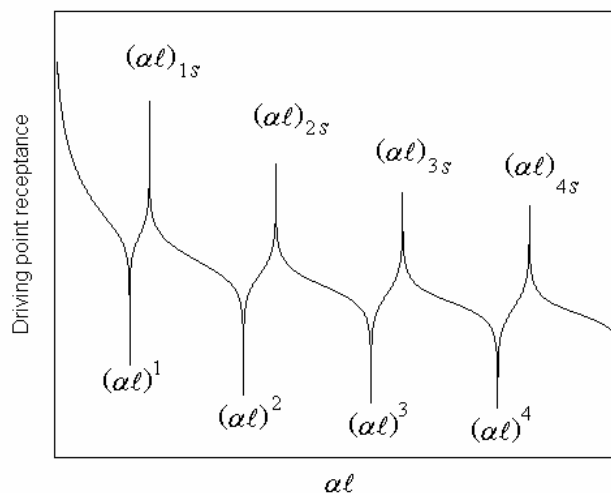


Fig. 5.17

Curba receptanței directe (în punctul de excitație) a barei libere la capete din fig. 5.16 este prezentată în fig. 5.17 în care s-a utilizat o scară verticală logaritmică.

Încărcare antisimetrică

Se consideră o bară de secțiune constantă, liberă la capete, acționată de un cuplu armonic $M_0 \cos \omega t$ aplicat la mijlocul barei (fig. 5.18).

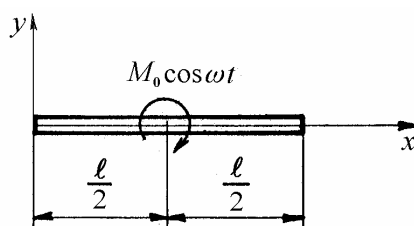


Fig. 5.18

Deplasarea laterală are expresia (5.49). Pentru jumătate de bară, condițiile la limită sunt

$$Y''(0) = 0, \quad Y'''(0) = 0, \quad Y'(l/2) = 0, \quad EIY''(l/2) = -M_0/2. \quad (5.57)$$

Amplitudinea vibrațiilor forțate într-o secțiune $0 \leq x \leq l/2$ este

$$Y(x) = \frac{M_0}{4EI\alpha^2} \left[\frac{\cos \frac{\alpha l}{2} + \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2} \sin \frac{\alpha l}{2} - \cos \frac{\alpha l}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha l}{2}} (\sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x) - \frac{\sin \frac{\alpha l}{2} + \operatorname{sh} \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2} \sin \frac{\alpha l}{2} - \cos \frac{\alpha l}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha l}{2}} (\cos \alpha x + \operatorname{ch} \alpha x) \right] \quad (5.58)$$

Anulând numitorul expresiei (5.58) se obține ecuația pulsațiilor

$$\operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} = 0. \quad (5.59)$$

Primele trei rădăcini ale ecuației (5.59) sunt

$$\alpha_n l / 2 = 2,365; \quad 5,498; \quad 8,639. \quad n = 1, 2, 3.$$

Valorile

$$(\alpha l)_{1a} = 3,927; \quad (\alpha l)_{2a} = 7,069; \quad (\alpha l)_{3a} = 10,21; \quad (5.60)$$

sunt rădăcinile ecuației (5.20) corespunzătoare modurilor antisimetrice de vibrație.

Dacă bara este acționată de o forță armonică $F_0 \cos \omega t$ aplicată într-o secțiune oarecare, sarcinile echivalente aplicate la mijlocul barei sunt o forță și un cuplu, deci răspunsul forțat se poate obține prin însumarea soluțiilor (5.52) și (5.58). Pulsațiile de rezonanță au expresia (5.12)

$$\omega_n = (\alpha_n l)^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A l^4}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

unde $\alpha_n l$ este dat de (5.52) și (5.57). Se observă că

$$\alpha_{1s} = \alpha_1, \quad \alpha_{1a} = \alpha_2, \quad \alpha_{2s} = \alpha_3, \quad \alpha_{2a} = \alpha_4, \quad \alpha_{3s} = \alpha_5, \quad \alpha_{3a} = \alpha_6, \dots$$

Aceasta se explică scriind ecuația (5.20) sub forma

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha l}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha l}{2}} \cdot \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{\alpha l}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\alpha l}{2}} = 1$$

care se mai scrie

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} + \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} \right) = 0. \quad (5.20,a)$$

Anulând fiecare factor se obțin ecuațiile pulsațiilor proprii (5.54) și (5.59).

Exemplul 5.6

O bară prismatică cu lungimea $2a$ și modulul de rigiditate la încovoiere EI este rezemată la capete pe arcuri de rigiditate k (fig. 5.19) și sollicitată la mijlocul deschiderii de o forță armonică transversală $F = F_0 \cos \omega t$. Se cere să se calculeze expresia amplitudinii vibrațiilor barei în punctul de aplicație al forței.

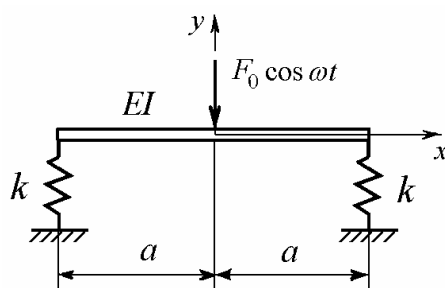


Fig. 5.19

Rezolvare. Deoarece forța F excită doar modurile simetrice de vibrație, se poate considera doar jumătatea din dreapta a barei, alegând originea axelor de coordonate în mijlocul acesteia.

În regim staționar, soluția ecuației de mișcare este de forma (5.45) în care deplasarea transversală $Y(x)$ este dată de (5.46). Condițiile la limită sunt

$$Y'(0) = 0, \quad EIY'''(0) = -F_0/2, \quad Y''(a) = 0, \quad EIY'''(a) = kY(a).$$

Săgeata dinamică la mijlocul barei este

$$Y(0) = \frac{F_0 a^3}{4EI} \frac{1}{(\alpha a)^3} \frac{1 + \cos \alpha a \operatorname{ch} \alpha a + \kappa (\sin \alpha a \operatorname{ch} \alpha a - \cos \alpha a \operatorname{sh} \alpha a)}{\frac{1}{2} (\sin \alpha a \operatorname{ch} \alpha a - \cos \alpha a \operatorname{sh} \alpha a) - \kappa \cos \alpha a \operatorname{ch} \alpha a}, \quad (5.61)$$

unde s-a notat

$$\kappa = \frac{k}{\alpha^3 EI}.$$

Prin anularea numitorului expresiei (5.61) se obține ecuația pulsațiilor proprii pentru modurile simetrice de vibrație (5.46).

Pentru $\kappa = 0$ se obține expresia (5.53) stabilită pentru bara liberă la capete.

5.2 Vibrațiile longitudinale ale barelor

Se consideră o bară cu secțiunea transversală constantă A și densitatea ρ , în care apar deplasări longitudinale $u = u(x, t)$ datorită forțelor axiale. În fig. 5.20 se prezintă forțele care acționează asupra unui element infinitezimal de lungime dx detașat din bară.

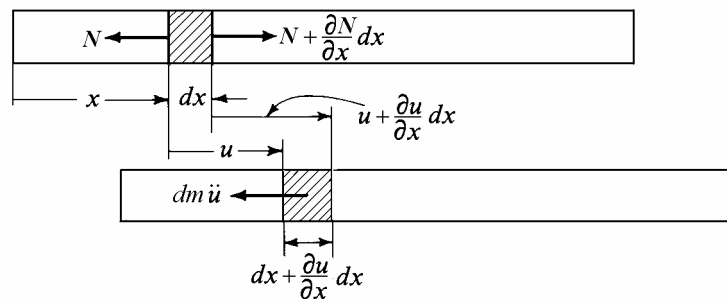


Fig. 5.20

Ecuția de mișcare în direcția x este

$$\left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) - N - (\rho A dx) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5.62)$$

unde u este deplasarea în secțiunea x .

În secțiunea $x + dx$ deplasarea este $u + (\partial u / \partial x) dx$. Alungirea specifică axială este $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$, tensiunea normală axială $\sigma_x = E \partial u / \partial x$, unde E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei. Alungirea specifică poate fi exprimată în funcție de forța axială N sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N}{EA}. \quad (5.63)$$

Combinând ecuațiile (5.62) și (5.63) rezultă ecuația diferențială a vibrațiilor longitudinale libere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.64)$$

Constanta $c = \sqrt{E/\rho}$ este viteza de propagare a undelor longitudinale în lungul barei.

Interesează în ce condiții poate avea loc o mișcare armonică sincronă definită printr-o soluție de forma

$$u(x,t) = U(x) \sin(\omega t + \phi). \quad (5.65)$$

Înlocuind soluția (5.65) în ecuația (5.64) rezultă

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \beta^2 U = 0 \quad (5.66)$$

în care

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{E}. \quad (5.67)$$

Soluția generală a ecuației (5.66) este

$$U(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x. \quad (5.68)$$

Cele două constante de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită. La un capăt fix, deplasarea este zero, $u = 0$. La un capăt liber, tensiunile și deci alungirile specifice sunt nule, $\partial u / \partial x = 0$. Efectul unei mase sau al unui arc atașate la capătul barei poate fi de asemenea introdus prin condiții la limită.

Bara liberă la capete

La o bară liberă la ambele capete, $\partial u / \partial x = 0$ la $x = 0$ și $x = \ell$. Rezultă $C_1 = 0$ și, deoarece C_2 trebuie să fie diferit de zero pentru a exista vibrații, ecuația pulsațiilor proprii (ecuația caracteristică) este

$$\sin \beta \ell = 0. \quad (5.69)$$

Soluția ecuației (5.69) constă dintr-un număr infinit de valori proprii

$$\beta_n \ell = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pulsațiile proprii rezultă din (5.67)

$$\omega_n = n \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.70)$$

iar formele modale sunt definite de funcțiile proprii

$$U_n(x) = C \cos n\pi \frac{x}{\ell},$$

unde C este o amplitudine nedeterminată.

Răspunsul dinamic al unei bare cu masă și elasticitate distribuite poate fi exprimat printr-o suprapunere de mișcări în modurile proprii de vibrație ale barei. Acestea sunt mișcări armonice sincrone, la pulsația proprie respectivă, în care toate punctele vibrează în fază (sau în opoziție), distribuția spațială a amplitudinilor fiind definită de funcția proprie. În aplicații practice, seria infinită este trunchiată la modurile ale căror pulsații proprii sunt cuprinse în domeniul de pulsații de lucru ale barei.

Matricea de rigiditate dinamică

Este util să se compare matricea de rigiditate dinamică exactă pentru un segment de bară în vibrații axiale (element articulat la capete) cu matricile obținute pe baza funcțiilor de formă statice, (4.32) și (4.38).

Notând u_1, u_2 , deplasările nodale dinamice și f_1, f_2 , forțele nodale dinamice (pozitive în sensul pozitiv al axei x), ca în §4.2.1, condițiile la capete sunt

$$U(0) = q_1, \quad U(\ell) = q_2, \quad U'(0) = -\frac{f_1}{EA}, \quad U'(\ell) = \frac{f_2}{EA}. \quad (5.71)$$

Utilizând soluția (5.68) rezultă

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \beta \ell & \cos \beta \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = EA\beta \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \cos \beta \ell & -\sin \beta \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix},$$

și, pentru $\sin \beta \ell \neq 0$,

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = EA\beta \begin{bmatrix} \cotg \beta \ell & -\operatorname{cosec} \beta \ell \\ -\operatorname{cosec} \beta \ell & \cotg \beta \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix},$$

astfel încât matricea de rigiditate dinamică este

$$\left[k_{din}^e \right] = EA\beta \begin{bmatrix} \cotg \beta \ell & -\operatorname{cosec} \beta \ell \\ -\operatorname{cosec} \beta \ell & \cotg \beta \ell \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

Din dezvoltarea în serie Taylor, limitată la trei termeni, a coeficienților matricii dinamice (5.72), se obține

$$EA\beta \cotg \beta \ell = \frac{EA}{\ell} - \omega^2 \frac{\rho A \ell}{3} - \omega^4 \frac{\ell^3 (\rho A)^2}{45EA} - \dots,$$

$$-EA\beta \operatorname{cosec}\beta\ell = -\frac{EA}{\ell} - \omega^2 \frac{\rho A\ell}{6} - \omega^4 \frac{7\ell^3(\rho A)^2}{360EA} - \dots$$

În ambele dezvoltări, se observă că primul termen este egal cu elementul corespunzător din matricea de rigiditate (4.32) iar termenul al doilea este egal cu elementul respectiv din matricea de masă coerentă (4.38) înmulțit cu $(-\omega^2)$, ambele calculate utilizând funcțiile de formă statice (4.24).

Dacă matricea de rigiditate dependentă de pulsație este

$$[k^e] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \omega^4 (\rho A\ell)^2 \frac{\ell}{45EA} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

iar matricea de masă coerentă dependentă de pulsație este

$$[m^e] = \frac{\rho A\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \omega^2 (\rho A\ell)^2 \frac{2\ell}{45EA} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

se constată că al treilea termen din seriile de mai sus provine din elementele dependente de frecvență ale matricilor de masă și de rigiditate.

5.3 Vibrațiile torsionale ale barelor

Ecuția de mișcare a unei bare în vibrații torsionale este similară cu cea pentru vibrațiile longitudinale stabilită în paragraful precedent și are forma

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (5.73)$$

unde θ este unghiul de răsucire în secțiunea x și G este modulul de elasticitate transversal al materialului barei.

Pentru calculul modurilor proprii de vibrație se caută soluții armonice de forma

$$\theta(x, t) = \Theta(x) \sin(\omega t + \phi). \quad (5.74)$$

Înlocuind în ecuația (5.73), se obține

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} + \gamma^2 \Theta = 0 \quad (5.75)$$

unde

$$\gamma^2 = \omega^2 \frac{\rho}{G}. \quad (5.76)$$

Soluția generală a ecuației (5.75) este

$$\Theta(x) = C_1 \sin \gamma x + C_2 \cos \gamma x. \quad (5.77)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită. La un capăt fix unghiul de răsucire este zero, $\theta = 0$. La un capăt liber, $\partial\theta/\partial x = 0$ (căci unghiul de răsucire produs de un moment de torsiune M este $d\theta = M dx/GI_t$). Efectul momentelor concentrate, al arcurilor de torsiune și al discurilor atașate de bară poate fi de asemenea introdus prin condiții la limită naturale.

Bară fixă la un capăt și liberă la celălalt capăt

La $x=0$, $\theta=0$, și la $x=\ell$, $\partial\theta/\partial x=0$. Rezultă $C_2=0$ și ecuația pulsațiilor proprii

$$\cos \gamma \ell = 0. \quad (5.78)$$

Ecuația (5.78) are un număr infinit de soluții de forma

$$\gamma_n \ell = \frac{2n-1}{2} \pi. \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Pulsațiile proprii sunt date de

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (5.79)$$

iar formele modurilor proprii de vibrație sunt definite de

$$\Theta_n(x) = C \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{\ell}$$

unde C este o amplitudine unghiulară nedeterminată.

Matricea de rigiditate dinamică

Prin analogie cu vibrațiile longitudinale, matricea de rigiditate dinamică a unui element de bară sollicitat la răsucire este

$$\left[k_{din}^e \right] = GI_t \gamma \begin{bmatrix} \cotg \gamma \ell & -\operatorname{cosec} \gamma \ell \\ -\operatorname{cosec} \gamma \ell & \cotg \gamma \ell \end{bmatrix}. \quad (5.80)$$

unde γ este dat de (5.76) iar GI_t este modulul de rigiditate la răsucire. Această matrice exprimă momentele de răsucire dinamice nodale în funcție de unghiurile de răsucire dinamice nodale.

Utilizând dezvoltarea în serie Taylor ca în §5.2, rezultă următoarele matrici de rigiditate și de masă dependente de pulsație

$$\begin{aligned} [k^e] &= \frac{GI_t}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \omega^4 (\rho I_t \ell)^2 \frac{\ell}{45GI_t} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}, \\ [m^e] &= \frac{\rho I_t \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \omega^2 (\rho I_t \ell)^2 \frac{2\ell}{45GI_t} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.4 Grinzi Timoshenko

Rezultatele obținute în §5.1 sunt valabile pentru bare zvelte, la care se neglijează inerția la rotație și deformațiile produse de forfecare. Analiza vibrațiilor barelor care include aceste efecte, cunoscută sub numele de *teoria Timoshenko a barelor*, este prezentată în partea a două a lucrării. În general, prin considerarea acestor efecte rezultă pulsații proprii cu valori mai mici decât cele obținute din relația (5.6).

La o bară cu secțiunea constantă, simplu rezemată la capete, valorile pulsațiilor proprii calculate cu relația (5.14) au o eroare sub 5% dacă $nr/\ell < 0,08$, unde $r = \sqrt{I/A}$ este raza de inerție a secțiunii transversale iar n este indicele modal.

O particularitate a barelor de tip Timoshenko este existența a două pulsații proprii diferite pentru fiecare tip de formă deformată a liniei elastice a barei. Pulsația mai mică se obține pentru un mod de vibrație în care deformațiile datorite încovoierii și forfecării sunt în fază și se însumează pentru a da deformația laterală totală. Pulsația mai mare corespunde unui mod de vibrație în care deformațiile de încovoierie și cele de forfecare sunt în opoziție, iar deformația laterală totală este egală cu diferența lor.

În teoria lui Timoshenko, ipoteza de bază se referă la forma secțiunii transversale. Se presupune că secțiunile plane rămân plane în timpul vibrațiilor, dar nu sunt perpendiculare pe axa deformată a barei, ci rotite cu un unghi de lunecare specifică constant în toate punctele secțiunii (neglijând deplanarea datorită deformațiilor de forfecare). Acest unghi se calculează pe baza unei suprafețe efective obținute înmulțind aria reală a suprafeței secțiunii transversale cu un *factor de forfecare* care depinde de coeficientul lui Poisson al materialului și de forma secțiunii barei.

6.

UNDE ELASTICE

În acest capitol se studiază undele elastice în medii solide. Pentru simplificarea expunerii, la început se prezintă propagarea undelor în bare drepte, deci într-un mediu elastic limitat, pentru care interpretarea fizică a relațiilor matematice este mai simplă. În continuare se tratează undele într-un mediu elastic, izotrop, omogen și infinit, pornind de la ecuațiile generale ale mișcării în trei dimensiuni, apoi într-un semispațiu elastic omogen și într-un semispațiu stratificat. Prezentarea se bazează pe un text scris pentru lucrarea [20] (L. Fetcu, 1975). În final se descriu pe scurt undele ghidate în plăci omogene.

6.1 Propagarea undelor

O perturbație produsă într-un mediu continuu se propagă sub formă de unde.

Dacă unui punct i se impune o deplasare, el antrenează prin forțele de legătură elastice și punctele învecinate. Dacă deplasarea este variabilă în timp, punctul respectiv devine sursă de mișcare. Mișcarea lui se transmite de la punct la punct spre zonele neexcitate direct, aflate inițial în repaus. Cu cât punctele sunt mai îndepărtate de sursă, cu atât intră mai târziu în mișcare. În felul acesta, mișcarea se *propagă* prin mediu cu viteză finită.

Este de așteptat ca soluțiile ecuațiilor de mișcare stabilite în cazul vibrațiilor sistemelor continue să descrie și fenomenul de propagare a mișcării vibratorii, deoarece aceste ecuații sunt deduse pe baza legilor mecanicii, considerând aceleași forțe de legătură elastice care condiționează propagarea mișcării.

De exemplu, vibrațiile longitudinale armonice ale barelor prismatice sunt descrise de o deplasare $u(x, t)$ care poate fi scrisă sub forma

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (6.1)$$

unde $X(x)$ este elongația deplasării axiale a punctelor din secțiunea x , iar $T(t)$ este funcția care descrie variația în timp a deplasării secțiunii considerate. Forma (6.1) a deplasării permite fie analiza mișcării vibratorii a punctelor barei dintr-o secțiune dată, fie determinarea distribuției deplasărilor în lungul axei longitudinale, la un moment dat.

Particularizând soluția (6.1) pentru cazul unei bare libere la capete (v. §5.2), în vibrație armonică (faza inițială nulă)

$$u(x,t) = a_0 \cos \alpha x \sin \omega t,$$

unde

$$\alpha^2 = \frac{\rho}{E} \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

prin transformarea produsului de funcții trigonometrice în sumă, se obține

$$\begin{aligned} u(x,t) &= a_0 [\sin(\omega t - \alpha x) + \sin(\omega t + \alpha x)] = \\ &= a_0 \left[\sin \frac{\omega}{c}(ct - x) + \sin \frac{\omega}{c}(ct + x) \right]. \end{aligned}$$

Astfel deplasarea $u(x,t)$ se poate scrie sub forma unei sume a două funcții de câte o variabilă

$$u(x,t) = f(\xi_1) + f(\xi_2), \quad (6.2)$$

unde

$$\xi_1 = ct - x, \quad \xi_2 = ct + x, \quad (6.3)$$

$$f(\xi) = a_0 \sin \frac{\omega}{c} \xi. \quad (6.4)$$

Se consideră componenta $u_1(x,t)$ a deplasării $u(x,t)$, dată de funcția $f(\xi_1)$

$$u_1(x,t) = f(ct - x),$$

pentru care se poate scrie șirul de egalități evidente

$$u_1(x,t) = f(ct + c\Delta t - c\Delta t - x) = f[c(t + \Delta t) - (x + c\Delta t)] = u_1(x + c\Delta t, t + \Delta t)$$

sau, reținând termenii extremi,

$$u_1(x,t) = u_1(x + \Delta x, t + \Delta t), \quad \Delta x = c\Delta t. \quad (6.5)$$

Egalitățile (6.5) arată că deplasarea $u_1(x,t)$ din secțiunea x se regăsește după timpul Δt într-o secțiune aflată la distanța $\Delta x = c\Delta t$, deci această valoare a

deplasării s -a propagat în lungul axei x , în sensul pozitiv, cu viteza constantă $c = \sqrt{E/\rho}$.

Funcția $f(ct - x)$ definește o undă progresivă. Caracterul de undă al unei mărimi (în acest caz – al deplasării) este dat de forma argumentului $\xi_1 = ct - x$ și nu de forma funcției f , care arată ce tip de mărime fizică se propagă. Prin unda (6.4) se propagă o deplasare armonică.

În mod similar se arată că funcția $f(ct + x)$ descrie propagarea deplasării în sensul negativ al axei, constituind o undă regresivă. Despre deplasarea $u(x, t)$ se spune că se propagă prin unde. Mișcarea vibratorie a punctelor mediului poate fi deci privită ca o suprapunere de unde progresive și regresive.

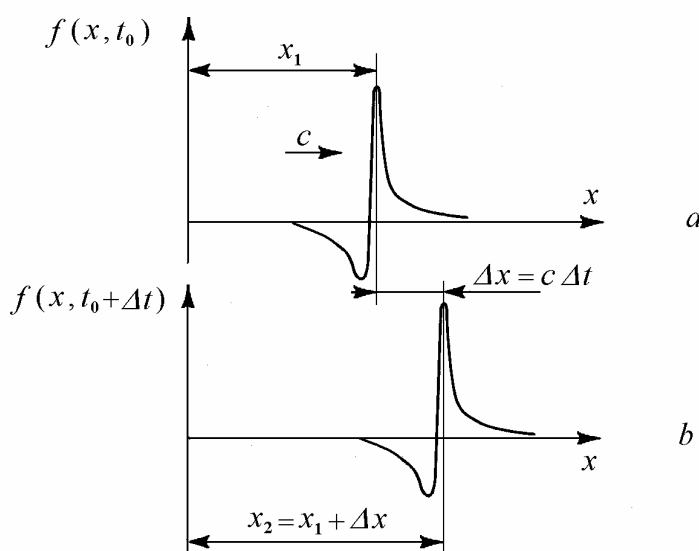


Fig. 6.1

Dacă se fixează timpul t_0 , unda are o reprezentare dată de forma funcției $f(ct_0 - x)$ considerată ca funcție de x , adică $f(x, t_0)$ (de exemplu, ca în Fig. 6.1, a). După timpul Δt , deci la $t_0 + \Delta t$, deplasarea din secțiunea x_1 se regăsește în secțiunea $x_2 = x_1 + c\Delta t$ (Fig. 6.1, b). Deoarece viteza c este independentă de secțiunea x , forma $f(x, t_0)$ s-a translatat după timpul Δt cu distanța $\Delta x = c\Delta t$, fără să se deformeze. Se spune că unda se propagă în lungul axei x (în spațiu), cu viteza constantă c .

În lichide nevâscoase și gaze se propagă unde de compresiune-rarefiere (dilatate), prin care particulele se deplasează pe direcția de propagare.

În solide elastice, interacțiunile de forfecare produc și alte tipuri de unde. În medii elastice nelimitate, se propagă *unde longitudinale* (unde P) și *unde transversale* (unde S) în care particulele se deplasează pe direcția, respectiv perpendicular pe direcția de propagare. La suprafața mediilor elastice se propagă *unde Rayleigh* (unde R), în care particulele au traiectorii eliptice cu semiaxa mare perpendiculară pe suprafața solidului.

În medii elastice limitate se propagă *unde ghidate*. În straturi de grosime finită, dispuse deasupra semispațiului elastic, și în plăci se propagă *unde Love* (unde Q), în care deplasarea particulelor este paralelă cu suprafața stratului și perpendiculară pe direcția de propagare. În plăci se propagă *unde Lamb*, în care particulele se deplasează pe orbite eliptice în plane care conțin normala la suprafața plăcii și direcția de propagare. *Undele Stoneley* sunt ghidate în lungul interfețelor în medii stratificate. Undele ghidate sunt descrise prin *moduri de undă*, similare *modurilor proprii de vibrație* ale elementelor structurilor de dimensiuni finite.

6.2 Unde longitudinale în bare prismatice

În bare prismatice se pot propaga trei feluri independente de unde: longitudinale, torsionale și de încovoiere. Primele două tipuri sunt descrise de ecuația undelor, fiind *unde nedispersive*, ale căror viteze *nu* depind de frecvența de excitație sau lungimea de undă. În continuare se studiază doar undele longitudinale.

6.2.1 Ecuația undelor. Soluția lui d'Alembert

Se consideră ecuația de mișcare (5.52) pentru vibrațiile longitudinale libere ale barelor prismatice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (6.6)$$

cunoscută sub numele de *ecuație a undelor*, pentru care se face schimbarea de variabile dată de relațiile (6.3):

$$\xi_1 = ct - x, \quad \xi_2 = ct + x.$$

Exprimând derivatele funcției $u(x,t)$ în noile variabile, se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + c \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \right).$$

Ecuția (6.6) este astfel redusă la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0, \quad (6.7)$$

numită *forma canonică* a ecuației undelor. Ea este satisfăcută de orice funcție $u(\xi_1, \xi_2)$ de tipul

$$u(\xi_1, \xi_2) = f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2). \quad (6.8)$$

Trecând la variabilele inițiale, se obține *soluția lui d'Alembert* pentru ecuația undelor

$$u(\xi_1, \xi_2) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x), \quad (6.9)$$

care exprimă deplasarea $u(x, t)$ ca suprapunerea a două unde: o *undă progresivă*, $f_1(ct - x)$, și o *undă regresivă*, $f_2(ct + x)$. Formele funcțiilor f_1 și f_2 nu sunt impuse prin ecuația (6.7); ele sunt determinate prin condițiile inițiale și condițiile la limită ale problemei.

Valorile succesive ale deplasării $u(x, t)$ în timp, formează *fazele (etapele) mișcării*. Undele f_1 și f_2 prin care se propagă aceste faze se numesc *unde de fază*. Despre punctele care au simultan aceleași deplasări se spune că sunt *în fază*.

Dacă deplasarea $u(x, t)$ este dată, de exemplu, de o undă progresivă

$$u(x, t) = f_1(ct - x),$$

fazele mișcării sunt complet determinate de valorile argumentului funcției f_1 , $\xi_1 = ct - x$, care se numește *faza undei*.

Punctele în care faza undei are aceeași valoare ξ_1 la un moment dat t_0 formează o *suprafață de undă*. Ecuația suprafeței de undă este deci

$$ct_0 - x = \xi_1 = \text{const.},$$

de unde, pentru că și termenul ct_0 este constant, rezultă

$$x = ct_0 - \xi_1 = x_0. \quad (6.10)$$

Expresia (6.10) este ecuația unui plan normal pe axa longitudinală a barei, deci suprafața de undă este plană, iar undele de acest tip se numesc *unde plane*.

Suprafața de undă (6.10), caracterizată de faza ξ_1 , se găsește la timpul t_0 în secțiunea x_0 a barei. La timpul t_1 ea se găsește în secțiunea x_1

$$x_1 = c t_1 - \xi_1,$$

parcurend distanța

$$\Delta x = x_1 - x_0 = c(t_1 - t_0).$$

Rezultă că suprafața de undă, de fază ξ_1 , se propagă în lungul axei Ox cu viteza constantă c , numită *viteză de fază*. Aceasta poate fi definită ca variația poziției x , dată de (6.10), pentru t variabil, când ξ_1 rămâne constant

$$c = \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (6.11)$$

Există o infinitate de suprafețe de undă, corespunzătoare infinității de valori ale argumentului ξ_1 . Suprafața de undă care separă zona perturbată de zona neperturbată se numește *front de undă*.

O suprafață de undă trece succesiv prin diferite puncte materiale ale barei. Direcția de propagare a suprafeței de undă coincide cu direcția de mișcare a punctelor materiale, care au în acest caz deplasări axiale. Undele pentru care direcția de propagare coincide cu direcția de deplasare a punctelor materiale se numesc *unde longitudinale*.

Viteza de mișcare a punctelor materiale aflate la un moment dat pe o suprafață de undă diferă de viteza de propagare a undei, c . Într-adevăr, viteza de mișcare este derivata în timp a deplasării $u(x, t)$. Pentru deplasarea dată printr-o undă progresivă, rezultă o viteză

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = c \frac{df_1}{d\xi_1}. \quad (6.12)$$

Deformația specifică respectivă, ε_x , are expresia

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = - \frac{df_1}{d\xi_1}, \quad (6.13)$$

deci, înlocuind $\varepsilon_x = \sigma_x/E$, rezultă pentru viteză

$$\dot{u}_p = -\varepsilon_x c = -\frac{\sigma_x c}{E}. \quad (6.14)$$

Astfel, într-o undă progresivă de dilatare ($\sigma_x > 0$) punctele materiale se mișcă în sens invers direcției de propagare, iar pentru o undă de comprimare ($\sigma_x < 0$) - în același sens.

Repetând raționamentul pentru mișcarea propagată printr-o undă regresivă, se obține

$$\dot{u}_r = \varepsilon_x c = \frac{\sigma_x c}{E}. \quad (6.15)$$

Viteza de mișcare și viteza de propagare au același sens în unde de dilatare, și sensuri opuse – în undele de comprimare.

6.2.2 Unde armonice

Dacă mișcarea care se propagă prin unde este periodică (bara vibrează longitudinal), deplasarea $u(x, t)$ pentru fiecare secțiune x este o funcție periodică de timp. Când deplasarea este reprezentată sub forma (6.9), această condiție este îndeplinită dacă funcțiile f_1 și f_2 sunt periodice în timp.

Fie T perioada mișcării. Din condiția de periodicitate în timp pentru unda progresivă, rezultă că într-o secțiune dată x are loc egalitatea

$$f_1(ct - x) = f_1[c(t + T) - x]. \quad (6.16)$$

Deoarece unda s-a deplasat în timpul T pe distanța $A = cT$, aceeași valoare a funcției f_1 se regăsește în secțiunea $x + A$

$$f_1(ct - x) = f_1[ct - (x + A)], \quad (6.17)$$

deci unda este o funcție periodică în spațiu, de perioadă $A = cT$.

Distanța A se numește *lungime de undă*. Când punctele materiale efectuează un ciclu de oscilație, unda se deplasează cu o lungime de undă. După cum se constată din relația (6.17), punctele aflate la distanță de o lungime de undă se mișcă în fază.

Cel mai simplu tip de undă este *unda armonică*

$$f_1(ct - x) = U_1 e^{iB(ct - x)} = U_1 [\cos B(ct - x) + i \sin B(ct - x)], \quad (6.18)$$

cu U_1 și B constante.

Faza undei armonice, φ , este argumentul funcției exponențiale, care are perioada 2π . Dacă unda are perioada mișcării T și lungimea de undă A , din condiția de periodicitate în timp și în spațiu rezultă

$$Bct = BA = 2\pi,$$

de unde

$$B = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6.19)$$

Faza undei devine astfel

$$\varphi = \frac{2\pi}{cT}(ct - x) = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x. \quad (6.20)$$

Variația fazei în unitatea de timp, într-o secțiune dată a barei,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} = \omega \quad (6.21)$$

este egală cu *pulsația* vibrației.

Modificarea fazei pe unitatea de lungime, la un anumit moment,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} = k \quad (6.22)$$

se numește *număr de undă*.

Rezultă

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (6.23)$$

Constanta U_1 , egală cu valoarea maximă pe care o poate atinge deplasarea în unda f_1 , este *amplitudinea undei*.

Unda armonică (6.18) devine

$$f_1(ct - x) = U_1 e^{i(\omega t - kx)} = U_1 [\cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx)]. \quad (6.24, a)$$

În mod similar, pentru o undă regresivă de aceeași pulsație, se obține

$$f_1(ct + x) = U_2 e^{i(\omega t + kx)} = U_2 [\cos(\omega t + kx) + i \sin(\omega t + kx)]. \quad (6.24, b)$$

Deplasarea $u(x, t)$ este dată fie de partea reală, fie de partea imaginară a sumei celor două unde. Punctele în care deplasarea este nulă se numesc *noduri*. Punctele în care deplasarea este maximă se numesc *ventre*.

Pentru o undă progresivă, luând deplasarea egală cu partea reală a funcției $f_1(ct - x)$, nodurile se obțin din ecuația

$$\cos(\omega t - kx) = 0,$$

de unde rezultă

$$\omega t - kx = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

$$x = \frac{\omega}{k}t - (2n+1)\frac{\pi}{2k} = ct - (2n+1)\frac{\lambda}{4}. \quad (6.25)$$

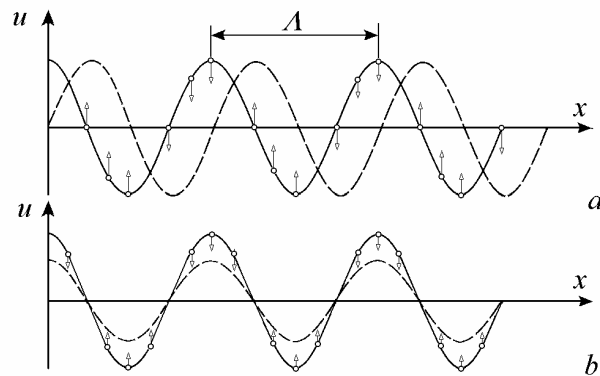


Fig. 6.2

În fiecare moment t , nodurile se găsesc în altă poziție, deplasându-se cu viteza c . Ventrele, care se află la distanța $\pm \lambda/4$ de nodurile vecine, se deplasează cu aceeași viteză (Fig. 6.2, a). Deplasarea se produce în sens pozitiv al axei sau în sens opus, după cum unda este progresivă sau regresivă.

Când deplasarea este dată de o sumă de unde – progresivă și regresivă

$$u(x, t) = U_1 \cos(\omega t - kx) + U_2 \cos(\omega t + kx),$$

nodurile se obțin din ecuația

$$U_1 \cos(\omega t - kx) + U_2 \cos(\omega t + kx) = 0,$$

sau din ecuația echivalentă

$$(U_1 + U_2) \cos \omega t \cos kx - (U_2 - U_1) \sin \omega t \sin kx = 0. \quad (6.26)$$

Când amplitudinile celor două unde sunt egale, $U_1 = U_2$, rezultă

$$2U_1 \cos \omega t \cos kx = 0,$$

sau

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad (6.27)$$

deci nodurile nu se deplasează, unda rezultantă este *staționară* (Fig. 6.2, b).

Dacă $U_1 \neq U_2$, unda rezultantă este progresivă când $U_1 > U_2$ și regresivă când $U_1 < U_2$. Poziția x a nodurilor este dată de soluția ecuației (6.26)

$$x = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{U_1 + U_2}{U_2 - U_1} \frac{1}{\operatorname{tg} \omega t} \right)$$

iar viteza lor de propagare, dx/dt , nu mai este constantă.

Viteza de fază $c = \sqrt{E/\rho}$ depinde numai de caracteristicile materialului. Două unde de pulsații diferite ($\omega_1 \neq \omega_2$) se propagă cu aceeași viteză c , dar au lungimi de undă diferite

$$\lambda_1 = c T_1 = c \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{k_1}, \quad \lambda_2 = c T_2 = c \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{k_2}.$$

Când într-o bară se suprapun două unde armonice progresive de pulsații diferite, deplasarea rezultantă se obține însumând deplasările exprimate prin cele două unde, la același moment t , în aceeași secțiune x .

Se consideră, de exemplu, două unde armonice progresive de pulsații ω_1 , ω_2 , cu amplitudini egale și faze inițiale nule

$$f_1(ct - x) = U_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)}, \quad \frac{\omega_1}{k_1} = c,$$

$$g_1(ct - x) = U_1 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}, \quad \frac{\omega_2}{k_2} = c.$$

Dacă deplasarea este dată de părțile reale ale celor două unde, rezultă

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \operatorname{Re}(f_1) + \operatorname{Re}(g_1) = \\ &= U_1 \left[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) \right] = \\ &= 2U_1 \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Deplasarea (6.28) poate fi privită ca o undă de pulsație

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T}$$

și număr de undă

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{2\pi}{\Lambda},$$

care are viteza de fază

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{\Lambda}{T}$$

și amplitudinea U modulată

$$U = 2U_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right) \quad \text{., (6.29)}$$

așa cum se arată în Fig. 6.3.

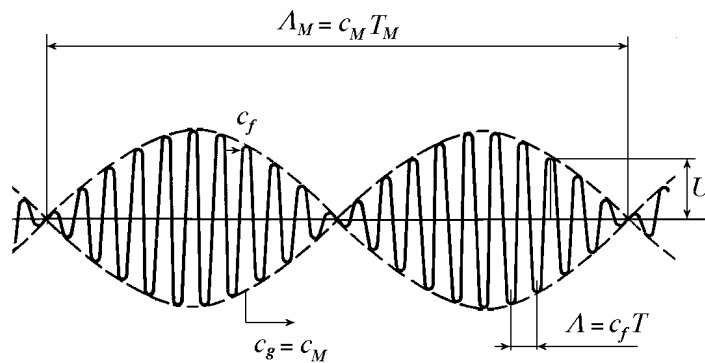


Fig. 6.3

Modulația se realizează tot printr-o undă, de pulsație

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T_M},$$

care se propagă cu viteza

$$c_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Când pulsațiile undelor componente diferă foarte puțin, modulația se face foarte lent ($\Delta\omega \rightarrow 0, \Delta k \rightarrow 0$) și viteza ei de propagare devine

$$c_g = \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (6.30)$$

Relația (6.30) definește viteza de grup. Deoarece pentru undele longitudinale $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = c$, se deduce că viteza de fază c_f a unei rezultante și viteza de grup c_g sunt constante și egale

$$c_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = c, \quad c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_M = c. \quad (6.31)$$

Modulația amplitudinii se propagă deci simultan cu unda modulată. Undele componente nu se deplasează relativ una față de alta; ele se numesc *nedispersive*.

6.2.3 Unde în bara de lungime finită

La extremitatea $x = 0$ a barei finite din Fig. 6.4, se aplică o forță armonică de pulsație ω , reprezentată prin funcția complexă $F = F_0 e^{i\omega t}$. Deplasarea complexă, armonică, provocată inițial în secțiunea $x = 0$, se propagă în sensul pozitiv al axei printr-o undă progresivă și la atingerea extremității $x = \ell$ se va reflecta, transformându-se într-o undă regresivă, care se suprapune defazat peste unda progresivă. Deplasarea se poate pune deci sub forma

$$u(x, t) = U_1 e^{i(\omega t - kx)} + U_2 e^{i(\omega t + kx)}, \quad (6.32)$$

amplitudinile U_1 și U_2 rezultând din condițiile la limită.

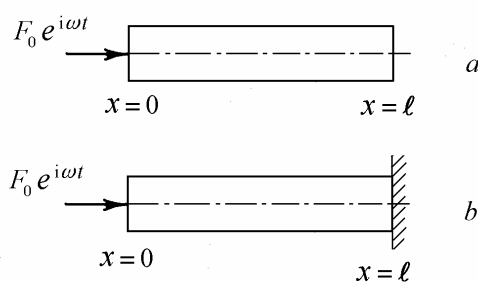


Fig. 6.4

Astfel, în secțiunea $x = 0$, tensiunea de compresiune este dată de raportul între forța F și aria secțiunii A

$$\sigma_x(0) = -\frac{F}{A} = E \varepsilon_x(0) = E \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (6.33)$$

de unde se obține

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -ikU_1 e^{i\omega t} + ikU_2 e^{i\omega t} = -\frac{F_0}{EA} e^{i\omega t}$$

sau

$$U_1 - U_2 = \frac{F_0}{ikEA}. \quad (6.34)$$

Pentru bara liberă la ambele capete, în secțiunea $x = \ell$ tensiunea $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$

este nulă

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\ell} = -ikU_1 e^{i(\omega t - k\ell)} + ikU_2 e^{i(\omega t + k\ell)} = 0,$$

de unde rezultă

$$U_1 e^{-ik\ell} - U_2 e^{ik\ell} = 0. \quad (6.35)$$

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (6.34) și (6.35) se obține

$$U_1 = -\frac{F_0}{2kEA} \frac{e^{ik\ell}}{\sin k\ell}, \quad U_2 = -\frac{F_0}{2kEA} \frac{e^{-ik\ell}}{\sin k\ell}, \quad (6.36)$$

Deplasarea (6.32) devine

$$u(x, t) = \frac{F_0}{2kEA} \frac{e^{ik\ell}}{\sin k\ell} \left[e^{i(\omega t - kx)} + e^{i(\omega t + kx - 2k\ell)} \right]. \quad (6.37)$$

Se poate observa că unda progresivă și unda regresivă dau deplasări de același sens, iar la capătul $x = \ell$ dau aceleași valori. Unda regresivă este defazată față de unda progresivă cu unghiul constant

$$\theta = -2k\ell = -2\frac{\omega\ell}{c},$$

corespunzător timpului $\frac{2\ell}{c}$ în care parcurge bara dus și întors. Bara intră în rezonanță pentru $\sin k\ell = 0$, de unde rezultă

$$k_n \ell = n\pi, \quad \omega_n = n \frac{\pi c}{\ell} = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.38)$$

valoare obținută în (5.70) pentru pulsațiile proprii.

Unda rezultantă (6.37) este staționară. Această proprietate este pusă în evidență dacă se scrie deplasarea (6.37) sub forma echivalentă

$$u(x, t) = -\frac{F_0}{2kEA} \frac{e^{i\omega t}}{\sin k\ell} \left[e^{ik(\ell-x)} + e^{-ik(\ell-x)} \right] = -\frac{F_0 e^{i\omega t}}{kEA} \frac{\cos k(\ell-x)}{\sin k\ell},$$

de unde rezultă că deplasarea $u(x, t)$ se anulează pentru

$$\begin{aligned} \cos k(\ell-x) &= 0, & k(\ell-x) &= (2n+1)\frac{\pi}{2}, \\ x &= \ell - (2n+1)\frac{\lambda}{4}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Pentru *bara încastrată la capătul al doilea* (Fig. 6.4, b), punând condiția ca în încastrare deplasarea (6.32) să fie nulă

$$u(x, t)|_{x=\ell} = U_1 e^{i(\omega t - k\ell)} + U_2 e^{i(\omega t + k\ell)} = 0,$$

sau

$$U_1 e^{-ik\ell} + U_2 e^{ik\ell} = 0,$$

se obțin constantele U_1 și U_2 , deci deplasarea $u(x, t)$ este de forma

$$u(x, t) = -\frac{iF_0}{2kEA} \frac{e^{ik\ell}}{\cos k\ell} \left[e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx - 2k\ell)} \right]. \quad (6.40)$$

Spre deosebire de cazul precedent, deplasările punctelor materiale în cele două unde au sensuri contrare, deci se scad, adică unda regresivă slăbește unda progresivă.

Deplasările reale se obțin din partea reală sau partea imaginară a deplasărilor complexe (6.37), (6.40), după cum forța armonică este dată de partea reală sau de partea imaginară a forței complexe $F_0 e^{i\omega t}$.

6.2.4 Propagarea energiei prin unde

Într-o bară elastică în vibrație, odată cu deplasarea $u(x, t)$ se propagă prin unde toate mărimile în expresia cărora intră deplasarea. Un interes deosebit prezintă propagarea energiei transmise mediului în vibrație de la sursa excitației.

Se consideră unda progresivă armonică

$$f_1(ct - x) = U_1 e^{i(\omega t - kx)}, \quad c = \frac{\omega}{k},$$

deplasarea $u(x, t)$ fiind dată de partea reală a undei

$$u(x, t) = U_1 \cos(\omega t - kx). \quad (6.41)$$

Valoarea instantanee a energiei pe unitatea de lungime a barei de masă $m = \rho A$, care se deplasează cu viteza $\dot{u} = \partial u / \partial t$ și este deformată cu ε_x sub acțiunea forței axiale $\sigma_x A$, are expresia

$$W_0 = W_c + W_p = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \sigma_x A \varepsilon_x = \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (6.42)$$

Introducând deplasarea (6.41) în (6.42) și ținând cont că $\omega^2 = c^2 k^2$ se obține

$$W_0 = \rho A \omega^2 U^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (6.43)$$

Deoarece W_0 nu este uniform distribuită pe unitatea de lungime, relația (6.43) indică de fapt energia punctelor materiale din secțiunea x , la momentul t . Aceasta se propagă printr-o undă progresivă de argument $\omega t - kx$, cu viteza constantă $c = \omega/k$. Printr-o secțiune x , în timpul dt , trece energia conținută într-o porțiune de bară de lungime $dx = c dt$

$$dW = W_0 dx = W_0 c dt.$$

Astfel, în unitatea de timp, prin secțiunea x se transferă o cantitate de energie

$$\frac{dW}{dt} = W_0 c = \rho A \omega^2 c U^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad (6.44)$$

reprezentând fluxul energiei la momentul t , egal cu puterea instantanee P , dezvoltată de forța de compresiune $-\sigma_x A$ care imprimă punctelor din secțiune viteza $\dot{u} = \partial u / \partial t$

$$P = -\sigma_x A \dot{u} = -EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho A \omega^2 c U^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

Energia conținută într-o porțiune de bară de o lungime de undă λ este egală cu cantitatea de energie care trece printr-o secțiune oarecare într-o perioadă T

$$W = \int_0^\lambda W_0 dx = \int_0^T W_0 c dt = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 U^2 c T. \quad (6.45)$$

Se obține astfel energia medie distribuită pe unitatea de lungime a barei

$$W_m = \frac{W}{A} = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 U^2 \quad (6.46)$$

și fluxul mediu de energie printr-o secțiune

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{W}{T} = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 U^2 c. \quad (6.47)$$

Dacă unda este regresivă, energia se propagă în sensul negativ al axei x . Pentru o bară semi-infinită ($0 \leq x < \infty$) excitată în secțiunea de capăt $x=0$ (Fig. 6.5), o undă regresivă ar trebui să transporte energie de la $+\infty$ către sursa de mișcare, fapt imposibil din punct de vedere fizic.

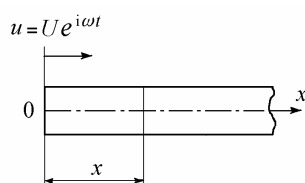


Fig. 6.5

Afirmația că energia nu poate fi radiată de la infinit spre zona unde se aplică excitația constituie *condiția de radiație*. Conform acesteia, în bara semi-infinită nu pot apare unde regresive. Dacă bara este de lungime finită, unda regresivă rezultă din reflectarea unei unde progresive și readuce spre sursă energia purtată de aceasta și nedisipată în mediul înconjurător.

6.2.5 Atenuarea undelor

În cazul materialelor cu amortizare mare, propagarea undelor nu mai este descrisă corect de ecuația (6.60). Se observă că dacă unei secțiuni i se impune, de exemplu, o deplasare armonică, de amplitudine constantă, această amplitudine scade în spațiu, în sensul propagării. Unda are amplitudinea descrescătoare, se *atenuează*.

Considerând că în prezența amortizărilor interne, la o variație armonică a tensiunii

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t},$$

corespunde o variație armonică defazată în urmă a deformației specifice

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)},$$

se introduce în ecuația undelor modulul de elasticitate complex

$$E^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = E_1 + iE_2 = E_1(1 + id). \quad (6.48)$$

Ecuația undelor devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^{*2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c^* = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}}, \quad (6.49)$$

Partea reală E_1 a modulului de elasticitate complex

$$E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta$$

este *modulul de elasticitate dinamic*, iar

$$d = \frac{E_2}{E_1} = \operatorname{tg} \delta$$

este *factorul de amortizare*.

Se poate defini astfel o *viteză de propagare complexă*

$$c^* = \sqrt{\frac{E_1(1+id)}{\rho}} = c_1(1+id)^{1/2} = c_1\sqrt{D} e^{i\frac{\delta}{2}}, \quad D = \sqrt{1+d^2}, \quad (6.50)$$

care are sens doar în cazul propagării unei deplasări *armonice*, deoarece modulul de elasticitate complex (6.48) este definit pentru solicitări armonice.

Numărul de undă corespunzător este de asemenea complex

$$k^* = \frac{\omega}{c^*} = \frac{\omega}{c_1\sqrt{D}} e^{-i\frac{\delta}{2}} = \frac{k_1}{\sqrt{D}} e^{-i\frac{\delta}{2}} = k_r + ik_i, \quad (6.51)$$

având partea reală și cea imaginară date de relațiile

$$k_r = \frac{k_1}{\sqrt{D}} \cos \frac{\delta}{2} = k_1 \sqrt{\frac{D+1}{2D}}, \quad k_i = -\frac{k_1}{\sqrt{D}} \sin \frac{\delta}{2} = -k_1 \sqrt{\frac{D-1}{2D}}. \quad (6.52)$$

O undă progresivă prin care se propagă deplasarea armonică a secțiunii $x = 0$, dată de funcția complexă

$$u(0, t) = u_0 e^{i\omega t}, \quad (6.53)$$

se poate pune sub forma

$$u(x, t) = u_0 e^{i(\omega t - k^* x)}, \quad (6.54)$$

care satisface atât condiția (6.53) cât și ecuația (6.49).

Introducând numărul de undă complex (6.51) în expresia (6.54) a undei, rezultă

$$u(x, t) = u_0 e^{i(\omega t - k_r x - i k_i x)} = u_0 e^{k_i x} e^{i(\omega t - k_r x)}. \quad (6.55, a)$$

sau

$$u(x, t) = u_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - k_r x)}, \quad (6.55, b)$$

unde coeficientul $\alpha = -k_i > 0$ se numește *constantă de atenuare*.

Partea reală $\beta = k_r$ a numărului de undă complex se numește *constantă de fază*. Numărul complex $\gamma = \alpha + i\beta$ se numește *constantă de propagare*.

Unda dată de expresia (6.55) nu mai este armonică, deoarece amplitudinea ei $U = u_0 e^{-\alpha x}$ nu este constantă, ci descrește exponențial în spațiu. Unda (6.55) se propagă cu viteza

$$c = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega \sqrt{D}}{k_1 \cos \frac{\delta}{2}} = c_1 \frac{\sqrt{D}}{\cos \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{|E^*|}{\rho}}. \quad (6.56)$$

Deoarece factorul de amortizare d este în general mic în comparație cu unitatea, se poate face aproximarea

$$k^* = \frac{k_1}{(1 + id)^{1/2}} \approx k_1 \left(1 - i \frac{d}{2} \right),$$

de unde rezultă

$$\alpha = k_1 \frac{\delta}{2}, \quad \beta = k_1, \quad c = \frac{\omega}{k_1} = c_1.$$

Pentru a caracteriza atenuarea undelor trebuie determinată experimental constanta α . O măsură a atenuării este mărimea, definită prin analogie cu decrementul logaritm al vibrației (2.51), dată de logaritmul raportului a două amplitudini aflate la distanță de o lungime de undă

$$\Delta = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{u_0 e^{-\alpha x}}{u_0 e^{-\alpha(x+\Lambda)}} = \alpha \Lambda, \quad (6.57)$$

de unde rezultă constanta de atenuare

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{U_1}{U_2} = \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (6.58)$$

Se consideră două amplitudini U_1 și U_3 aflate la distanța x_0 , al căror raport este

$$\frac{U_3}{U_1} = e^{-\alpha x_0} = \frac{1}{e^{\alpha x_0}}.$$

Acest raport devine $\frac{1}{e} = 0,368$ când exponentul este $\alpha x_0 = 1$. Deci atenuarea este inversul distanței x_0 (Fig. 6.6).

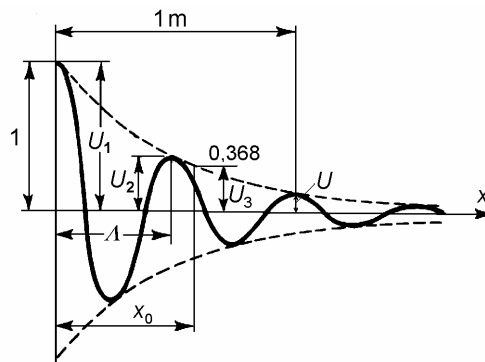


Fig. 6.6

Atenuarea α se măsoară în Neper/m (1 Neper = 8,686 dB). Ea este numeric egală cu logaritmul natural al raportului a două amplitudini măsurate la distanța de 1 m (Fig. 6.6)

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U} \quad [\text{Neper/m}].$$

În general, atenuarea este proporțională cu pătratul frecvenței undelor, deci valorile atenuării se dau la o anumită frecvență sau mediate pe un interval de frecvențe. Se recomandă determinarea experimentală a atenuării pentru fiecare material.

Problemele concrete de tipul celor rezolvate în § 6.2.3 se tratează analog, introducând în expresia undei (6.37) sau (6.40) numărul de undă complex k^* .

Studiul propagării undelor torsionale în bare prismatice conduce la rezultate similare cu cele obținute pentru propagarea undelor longitudinale, deoarece ecuația care descrie fenomenul are forma (6.6)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

unde θ este unghiul de răsucire iar c_s - viteza de propagare a undelor de torsiune.

6.3 Unde transversale în bare prismatice

Spre deosebire de undele longitudinale și cele torsionale, undele transversale în bare prismatice sunt dispersive, viteza lor depinzând de frecvența de excitație și de lungimea de undă. În barele de lungime finită, undele progresive și cele regresive se compun, producând unde staționare care constituie modurile proprii de vibrație.

6.3.1 Viteza de fază și viteza de grup

În cazul vibrațiilor transversale libere ale barelor drepte, ecuația de mișcare a fost stabilită în Cap.5 sub forma

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (6.59)$$

O deplasare armonică, reprezentată prin partea reală sau cea imaginară a funcției complexe

$$v(x, t) = Y(x) e^{i\omega t} \quad (6.60)$$

este soluție a acestei ecuații, dacă funcția $Y(x)$ satisface condiția

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - k_T^4 Y = 0, \quad k_T^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI_z},$$

de unde rezultă

$$Y(x) = C_1 e^{-k_T x} + C_2 e^{k_T x} + C_3 e^{-ik_T x} + C_4 e^{ik_T x}. \quad (6.61)$$

Introducând expresia (6.61) a funcției $Y(x)$ în relația (6.60), se obține

$$v(x, t) = (C_1 e^{-k_T x} + C_2 e^{k_T x}) e^{i\omega t} + C_3 e^{i(\omega t - k_T x)} + C_4 e^{i(\omega t + k_T x)}. \quad (6.62)$$

În (6.62) se identifică două unde plane armonice: una progresivă

$$f_1(c_T t - x) = e^{i(\omega t - k_T x)} \quad (6.63)$$

și una regresivă

$$f_2(c_T t + x) = e^{i(\omega t + k_T x)}, \quad (6.64)$$

care se propagă în lungul axei x cu viteza de fază c_T

$$c_T = \frac{\omega}{k_T} = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{EI_z}{\rho A}} = \sqrt{\omega} \sqrt{cr} = k_T cr = \frac{2\pi}{\Lambda_T} cr, \quad (6.65)$$

unde $k_T = \sqrt{\omega/cr}$ este numărul de undă, $c = \sqrt{E/\rho}$ este viteza de propagare a undelor longitudinale și $r = \sqrt{I_z/A}$ este raza de inerție a secțiunii transversale.

Deoarece direcția de mișcare y a punctelor materiale este perpendiculară pe direcția de propagare a undelor (6.63), (6.64), acestea se numesc *unde transversale*.

Viteza de propagare c_T depinde de pulsația ω a mișcării vibratorii propagate, astfel încât vibrațiile de frecvență mică $\left(f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}\right)$ se propagă mai încet decât vibrațiile de frecvență mare $\left(f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}\right)$,

$$c_{T_1} = \sqrt{\omega_1} \sqrt{cr} < c_{T_2} = \sqrt{\omega_2} \sqrt{cr}.$$

Când se suprapun două unde de pulsații diferite ($\omega_1 \neq \omega_2$), unda rezultantă dată de (6.28) se propagă cu viteza

$$c_T = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_{T_1} + k_{T_2}},$$

diferită de vitezele de propagare ale undelor componente

$$c_{T_1} = \frac{\omega_1}{k_{T_1}}, \quad c_{T_2} = \frac{\omega_2}{k_{T_2}},$$

și de viteza de propagare a modulației

$$c_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_{T_1} - k_{T_2}}.$$

Undele componente se deplasează relativ una față de alta, la fel unda rezultantă și unda de modulație. Astfel de unde se numesc *dispersive*.

În cazul particular al compunerii a două mișcări de pulsații foarte apropiate ($\omega_1 \cong \omega_2$), unda rezultantă are aproximativ aceeași viteză de fază ca și undele componente

$$c_T = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_{T_1} + k_{T_2}} \approx \frac{2\omega_1}{2k_{T_1}} \approx \frac{2\omega_2}{2k_{T_2}}.$$

Viteza de grup, c_g , cu care se propagă modulația, diferă de viteza de fază comună, c_T ,

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_T} = \frac{d(k_T^2 cr)}{dk_T} = 2k_T cr = 2c_T. \quad (6.66)$$

Relația de definiție a vitezei de fază (6.65) arată că, micșorând lungimea de undă λ_T (ceea ce echivalează cu creșterea frecvenței oscilației transmise), se pot obține viteze de propagare a deplasărilor oricât de mari și respectiv, viteze de grup duble. În realitate, atât viteza de fază cât și viteza de grup sunt limitate superior, fapt care nu este pus în evidență de relația (6.65).

Această neconcordanță este rezultatul neglijării inerției la rotație a secțiunii transversale în ecuația (6.59) care, la frecvențe mari, deci la accelerații unghiulare mari, modifică aspectul fenomenului. Într-adevăr, introducând în ecuația (6.59) termenul $-I_z \rho \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}$, corespunzător inerției la rotație a secțiunii transversale (Hamburger și Buzdugan, 1958), aceasta devine

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c^2 r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (6.67)$$

O undă de tipul (6.63) sau (6.64) satisface ecuația (6.67) dacă

$$k_T^4 - \frac{1}{c^2} \omega^2 k_T^2 - \frac{1}{c^2 r^2} \omega^2 = 0. \quad (6.68)$$

Introducând viteza de fază $c_T = \frac{\omega}{k_T}$ (sau $\omega = c_T k_T$) în relația (6.68), se obține

$$c_T = c \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k_T^2 r^2}}} = c \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A_T^2}{4\pi^2 r^2}}} < c. \quad (6.69)$$

Pentru lungimi de undă $\lambda_T > r$, se poate face aproximarea

$$1 + \frac{\lambda_T^2}{4\pi^2 r^2} \approx \frac{\lambda_T^2}{4\pi^2 r^2},$$

obținându-se pentru viteza de fază expresia (6.65). Dacă $\lambda_T \ll r$, această aproximare poate conduce la rezultatul absurd $c_T > c$, sau, la concluzia că pot exista viteze oricât de mari de propagare a undelor transversale, când $\lambda_T \rightarrow 0$. Datorită modificării calitative a rezultatelor, neglijarea inerției de rotație a secțiunii transversale este permisă pentru frecvențe

$$f < 2\pi \frac{c}{r} = 2\pi \sqrt{\frac{EA}{\rho I_z}}.$$

De exemplu, pentru o bară de oțel cu diametrul de 100 mm, se poate utiliza ecuația (6.59) până la o frecvență de 10^6 Hz.

Exprimând ω în funcție de k_T din relația (6.68) și derivând în raport cu k_T , se obține viteza de grup

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_T} = c_T \frac{1 + \frac{2}{k_T^2 r^2}}{1 + \frac{1}{k_T^2 r^2}} > c_T, \quad (6.70)$$

care, pentru lungimi de undă λ_T mai mari ca raza de inerție r , devine

$$c_g \approx c_T \frac{\frac{2}{k_T^2 r^2}}{\frac{1}{k_T^2 r^2}} = 2c_T,$$

fiind de asemenea limitată superior de viteza de propagare a undelor longitudinale c , după cum se poate verifica ușor.

Din expresia (6.62) a deplasării $v(x,t)$ se constată că numai o parte a acestei deplasări se propagă prin unde. Considerând condițiile la limită specifice fiecărei probleme concrete, se pot determina constantele C_1, \dots, C_4 , deci se pot stabili amplitudinile undelor progresive și regresive prin care se propagă mișcările armonice (6.62).

Problemele legate de transmiterea energiei prin unde transversale și de atenuarea undelor transversale, se tratează ca și pentru undele longitudinale, ținând

seama de concluziile obținute anterior cu privire la proprietățile de propagare ale mișcărilor transversale prin unde.

6.3.2 Unde în bara rezemată pe mediu elastic

În cazul unei rezemări continue pe un mediu deformabil, mediul se opune deplasărilor transversale ale barei printr-o reacțiune distribuită continuu, $p_r(x)$. Cea mai simplă lege de distribuție a reacțiunii opuse de un mediu elastic este obținută pe baza ipotezei lui Winkler, conform căreia reacțiunea este proporțională cu săgeata barei

$$p_r(x) = -\kappa v. \quad (6.71)$$

Dacă bara rezemată pe mediu vibrează transversal în planul xOy , în ecuația fibrei medii deformate

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p(x, t)$$

sarcina distribuită $p(x, t)$ este formată din forțele de inerție $-\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ și din reacțiunea mediului (6.71), astfel încât ecuația de mișcare a barei devine

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \kappa v = 0. \quad (6.72)$$

Pentru a constata dacă deplasările barei în vibrație armonică se pot propaga prin unde, se introduce funcția

$$v(x, t) = v_0 e^{i(\omega t \mp k_e x)} \quad (6.73)$$

în ecuația (6.72).

Notând

$$\frac{\rho A}{EI_z} = \frac{1}{c^2 r^2} = 4 n^2, \quad \frac{\kappa}{EI_z} = 4 m^2,$$

rezultă că funcția (6.73) satisface ecuația (6.72) dacă

$$k_e^4 - 4n^2 \omega^2 + 4m^4 = 0, \quad (6.74)$$

relație care precizează legătura între numărul de undă și pulsația mișcării armonice propagate.

Viteza de propagare a undei (6.73)

$$c_e = \frac{\omega}{k_e},$$

se obține din (6.74) înlocuind $\omega = c_e k_e$

$$c_e = \frac{k_e}{2n} \sqrt{1 + \frac{4m^4}{k_e^4}} = \frac{\pi}{n\Lambda_e} \sqrt{1 + \frac{m^4}{4\pi^4} \Lambda_e^4}. \quad (6.75)$$

Deoarece viteza de propagare depinde de lungimea de undă $\Lambda_e = 2\pi/k_e$, undele sunt dispersive. Expresia (6.75) are un minim pentru $k_e = \sqrt{2} m$, deci există o viteză de propagare minimă

$$c_{e_{min}} = \frac{m}{n}, \quad (6.76)$$

corespunzătoare pulsației

$$\omega^2 = (c_{e_{min}} k_e)^2 = \frac{2m^4}{n^2} = 2 \frac{\kappa}{\rho A}. \quad (6.77)$$

Dacă se analizează vibrațiile provocate de o sarcină transversală mobilă pe bară, atunci când sarcina se deplasează cu viteza $c_{e_{min}}$ grinda intră în rezonanță.

Înlocuind în (6.74) $k_e^4 = \frac{\omega^4}{c_e^4}$, se obține

$$c_e^2 = \frac{\omega^2}{2n \sqrt{\omega^2 - \frac{m^4}{n^2}}}.$$

Viteza de propagare are valori reale (propagarea se poate produce) pentru mișcări cu pulsații

$$\omega^2 > \frac{m^4}{n^2} = \frac{\kappa}{\rho A},$$

sau

$$\omega^2 \rho A v_0 > \kappa v_0, \quad (6.78)$$

ceea ce înseamnă că amplitudinea forței de inerție distribuite trebuie să depășească amplitudinea reacțiunii distribuite a mediului elastic, condiție necesară mișcării vibratorii.

6.4 Unde în medii elastice

Studiul propagării undelor longitudinale și transversale în bare s-a făcut pe baza ecuațiilor de mișcare simplificate, stabilite cu ipoteza secțiunii plane (Bernoulli), specifică Rezistenței materialelor. Pentru a controla efectul aproximărilor implicate în această ipoteză, se poate rezolva aceeași problemă pornind de la ecuațiile de mișcare generale ale unui mediu elastic izotrop.

6.4.1 Ecuațiile undelor în trei dimensiuni

Ecuațiile de mișcare generale ale unui mediu elastic (Nowacki, 1969) se deduc din studiul condițiilor de echilibru al unui element infinitezimal (Fig. 6.7), aplicând principiul lui d'Alembert.

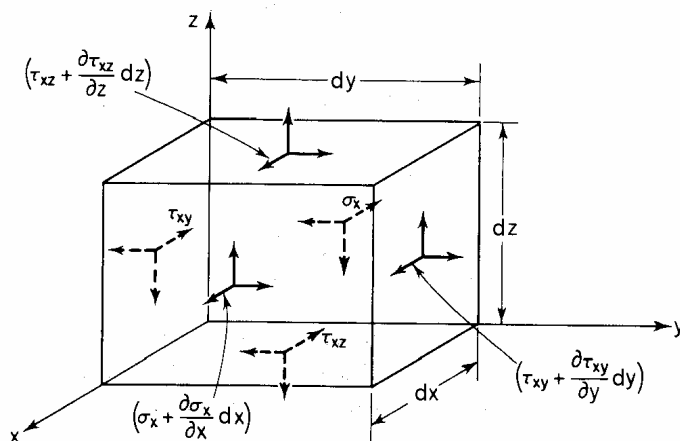


Fig. 6.7

Astfel, scriind echilibrul forțelor care acționează paralel cu axa x , se obține

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy = \rho (dx dy dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ecuații similare se pot scrie pentru forțele care acționează paralel cu axele y și z . După reduceri și simplificări, rezultă ecuațiile mișcării

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{6.79}$$

în care u , v , w reprezintă deplasările în direcțiile x , y , respectiv z , ρ este masa specifică, iar t – timpul.

Pentru a exprima ecuațiile (6.79) numai în deplasări, se utilizează relațiile cunoscute între tensiuni și deformații specifice, în care acestea din urmă se exprimă prin deplasările u , v și w .

Se obțin astfel ecuațiile

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{6.80, a}$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{6.80, b}$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{6.80, c}$$

unde λ este constanta lui Lamé, ε_v este deformația volumică specifică și ∇^2 - operatorul lui Laplace:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu},$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dacă se derivează ecuația (6.80, a) în raport cu x , ecuația (6.80, b) în raport cu y și (6.80, c) în raport cu z , după însumarea lor rezultă

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \varepsilon_v = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t^2}. \tag{6.81}$$

Dacă se derivează ecuația (6.80, a) în raport cu y și ecuația (6.80, b) în raport cu x , după scăderea lor rezultă

$$G\nabla^2\omega_z = \rho \frac{\partial^2\omega_z}{\partial t^2}, \quad (6.82)$$

unde

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

este componenta rotației față de axa z .

Procedând în mod asemănător, se obțin și pentru componentele ω_y , ω_x ecuații de forma (6.82)

$$G\nabla^2\omega_y = \rho \frac{\partial^2\omega_y}{\partial t^2}, \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (6.83)$$

$$G\nabla^2\omega_x = \rho \frac{\partial^2\omega_x}{\partial t^2}, \quad \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (6.84)$$

O ecuație de tipul

$$\nabla^2 F(x, y, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (6.85)$$

este ecuația undelor în trei dimensiuni.

6.4.2 Unde longitudinale și unde transversale

Se poate verifica ușor că orice funcție $F(\xi)$, unde ξ are forma

$$\xi = n_1x + n_2y + n_3z - ct, \quad (6.86)$$

satisfacă ecuația (6.85), dacă este îndeplinită condiția

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (6.87)$$

Ecuația

$$n_1x + n_2y + n_3z = p \quad (6.88)$$

reprezintă un plan, pentru care n_1 , n_2 , n_3 sunt cosinuzii directori ai normalei și p este distanța la originea sistemului de axe.

Deoarece au loc egalitățile evidente

$$F(p - ct) = F(p + c\Delta t - c\Delta t - ct) = F[p + \Delta p - c(t + \Delta t)], \quad \Delta p = c\Delta t,$$

funcția $F(\xi)$ descrie propagarea unei unde plane în sensul pozitiv al normalei de cosinuși directori n_1, n_2, n_3 .

Deformația volumică specifică ε_v și rotațiile specifice $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ se pot propaga deci prin unde plane, cu viteze diferite, ε_v cu viteza

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad (6.89)$$

iar $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ cu viteza

$$c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} < c_P. \quad (6.90)$$

Valori tipice pentru metale sunt $c_P = 5 - 8$ km/s și $c_S \approx 0,5 c_P$.

Relația (6.89) se mai scrie

$$c_P = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}, \quad (6.89, a)$$

unde

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}G$$

este modulul de elasticitate volumic.

Se consideră cazul particular în care suprafața de undă este un plan paralel cu planul yOz , cu normala Ox ($n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$), iar deplasările u, v și w sunt funcții de x și t . În acest caz, atât deformația volumică specifică ε_v cât și rotațiile specifice $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sunt funcții de x și t , obținându-se

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = -\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ecuțiile (6.81)-(6.83) devin astfel

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (6.91, a)$$

$$G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (6.91, b)$$

$$G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6.91, c)$$

și coincid ca formă cu ecuațiile care rezultă prin particularizarea sistemului (6.80, a)-(6.80, c).

Ecuția (6.91, a) definește o undă plană *longitudinală*, $u(x,t)$, care se deplasează cu viteza (6.89). Ecuțiile (6.91, b) și (6.91, c) definesc două unde *transversale* $v(x,t)$, $w(x,t)$, care se deplasează cu viteza (6.90).

Deformațiile de volum se propagă deci prin unde longitudinale, iar componentele rotațiilor – prin unde transversale. Deoarece $c_P > c_S$, în seismologie undele longitudinale se numesc *primare* (unde P), fiind primele înregistrate în cazul unui cutremur, având viteză de propagare mai mare. Undele transversale se numesc *secundare* (unde SH – în plan orizontal, unde SV – în plan vertical), având viteză de propagare mai mică, deci fiind înregistrate mai târziu.

Într-un mediu infinit se pot propaga unde sferice, dacă perturbațiile care le produc sunt simetrice față de un punct. Undele sferice sunt unde longitudinale și se obțin sub forma

$$F(r,t) = \frac{1}{R} F_1(r-ct), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

din ecuația (6.85) scrisă în coordonate sferice.

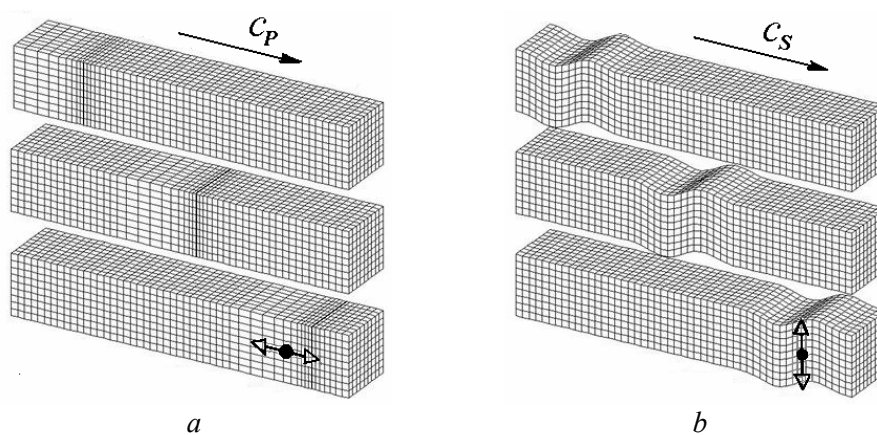


Fig. 6.8

O reprezentare simplificată a propagării undelor este prezentată în Fig. 6.8, a, pentru undele longitudinale și în fig. 6.8, b pentru undele transversale SV.

Atunci când undele P și S ajung la o interfață sub un unghi diferit de 90^0 , se produce o conversie a modurilor de propagare. Dacă o undă P întâlnește o interfață, pot rezulta patru moduri de propagare: unde P reflectate și transmise, unde SV reflectate și transmise. Similar, atunci când o undă SV întâlnește o interfață, aceleași patru moduri se produc în proporții diferite. Studiul reflecției și refracției undelor depășește cadrul acestui curs.

6.4.3 Unde Rayleigh

În cazul unui mediu omogen infinit, formele undelor care se pot propaga sunt determinate de excitație și de condițiile inițiale, astfel încât deplasările la infinit să rămână finite și, în plus, să fie satisfăcută condiția de radiație.

Dacă spațiul este limitat de un plan, introducerea condițiilor la limită pe suprafața respectivă permite punerea în evidență a unui tip particular de unde (J. W. Strutt, Lord Rayleigh, 1885) care se propagă numai în vecinătatea suprafeței limită, denumite *unde Rayleigh*.

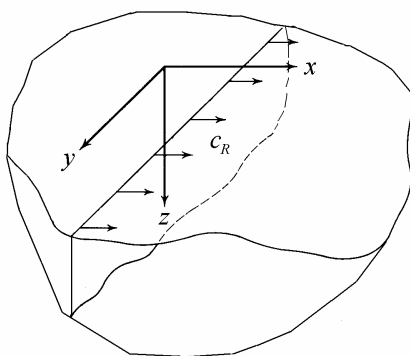


Fig. 6.9

Se consideră semispațiul mărginit de planul xOy , cu axa z orientată spre interiorul mediului (fig. 6.9), aflat într-o stare plană de deformare, astfel încât

$$u = u(x, z, t), \quad v = 0, \quad w = w(x, z, t). \quad (6.92)$$

Ținând seama că, pentru aceste condiții, se obține

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ecuația de mișcare (6.80, b) este identic satisfăcută, iar ecuațiile (6.80, a, c) devin

$$c_P^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + c_S^2 \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (6.93, a)$$

$$c_P^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + c_S^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (6.93, b)$$

Suprafața semispațiului este liberă, deci tensiunile σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} sunt nule pentru $z = 0$:

$$\sigma_z(0, t) = \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_z \Big|_{z=0} = (\lambda + 2G) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0, \quad (6.94, a)$$

$$\tau_{xz}(0, t) = G \gamma_{xz} \Big|_{z=0} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (6.94, b)$$

Condiția $\tau_{yz} \Big|_{z=0} = 0$ este identic satisfăcută, deoarece în toate punctele semispațiului deformația $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ este nulă.

Ecuțiile (6.93, a, b) împreună cu condițiile (6.94, a, b) determină mișcările plane libere ale semispațiului elastic. Se pune problema dacă punctele materiale pot executa mișcări vibratorii armonice de pulsație ω în plane paralele cu xOz , care să se propage numai în lungul axei Ox , deci dacă deplasări de forma

$$u(x, z, t) = U(z) e^{i(\omega t - k_R x)}, \quad (6.95, a)$$

$$w(x, z, t) = W(z) e^{i(\omega t - k_R x)}, \quad (6.95, b)$$

satisfac ecuațiile obișnuite și condițiile la limită.

Introducând funcțiile (6.95, a, b) în ecuațiile (6.93, a, b) și rezolvând sistemul de ecuații diferențiale rezultat, liniar și omogen în $U(z)$ și $W(z)$, se obține

$$U(z) = C_1 e^{-k_R q z} + C_2 e^{k_R q z} + s \left(C_3 e^{-k_R s z} + C_4 e^{k_R s z} \right), \quad (6.96, a)$$

$$W(z) = -iq \left(C_1 e^{-k_R q z} + C_2 e^{k_R q z} \right) - i \left(C_3 e^{-k_R s z} + C_4 e^{k_R s z} \right), \quad (6.96, b)$$

unde q și s sunt constante reale și pozitive pentru ω dat

$$q = \left(1 - \frac{\omega^2}{k_R^2 c_P^2} \right)^{1/2} = \left(1 - \frac{c_R^2}{c_P^2} \right)^{1/2},$$

$$s = \left(1 - \frac{\omega^2}{k_R^2 c_S^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{c_R^2}{c_S^2}\right)^{1/2}, \quad c_R = \frac{\omega}{k_R} < c_S < c_P.$$

Pentru q sau s imaginar, ar rezulta componente ale deplasărilor u , w care se propagă și în lungul axei z , ceea ce a fost exclus prin enunțul problemei.

Deoarece pentru $z \rightarrow \infty$ deplasările trebuie să rămână finite, rezultă $C_2 = C_4 = 0$, funcțiile (6.96, a , b) devenind

$$U(z) = C_1 e^{-k_R q z} + s C_3 e^{-k_R s z}, \quad (6.97, a)$$

$$W(z) = -i \left(q C_1 e^{-k_R q z} + C_3 e^{-k_R s z} \right). \quad (6.97, b)$$

Condițiile la limită (6.94, a , b) sunt îndeplinite dacă funcțiile $U(z)$ și $W(z)$ satisfac ecuațiile

$$(\lambda + 2G) W'(0) - \lambda k_R i U(0) = 0, \quad (6.98, a)$$

$$U'(0) - k_R i W(0) = 0, \quad (6.98, b)$$

de unde rezultă pentru constantele C_1 și C_3 sistemul liniar și omogen

$$(1 + s^2) C_1 + 2s C_3 = 0,$$

$$2q C_1 + (1 + s^2) C_3 = 0.$$

Condiția ca acest sistem să aibă soluții nebanale (diferite de zero) se obține prin anularea determinantului coeficienților

$$(1 + s^2)^2 - 4sq = 0, \quad (6.99)$$

de unde rezultă o ecuație pentru viteza de propagare $c_R = \frac{\omega}{k_R}$ a undelor Rayleigh,

unde k_R este numărul de undă al undelor Rayleigh.

Introducând notațiile

$$\frac{c_S^2}{c_P^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} = \varepsilon < 1, \quad \frac{c_R^2}{c_S^2} = \left(\frac{\omega}{k_R c_S} \right)^2 = p < 1,$$

ecuația (6.99) în necunoscuta p devine

$$f(p) = p^3 - 8p^2 + (24 - 16\varepsilon)p - 16(1 - \varepsilon) = 0, \quad (6.100)$$

formă cunoscută sub numele de *ecuația vitezei de fază a undelor Rayleigh*.

Dacă această ecuație admite o rădăcină reală pozitivă subunitară (care va da viteza de propagare c_R), rezultă că mișcările (6.95, a, b) sunt posibile. Deoarece $f(0) = -16(1 - \varepsilon) < 0$ și $f(1) = 1 > 0$, există o rădăcină reală $0 < p < 1$ și se poate demonstra că ea este unică în acest interval.

Viteza de propagare a undelor Rayleigh este deci mai mică decât viteza de propagare a undelor transversale în același mediu $c_R < c_S$. Ea nu depinde de frecvența mișcării vibratorii, deci *undele Rayleigh* într-un mediu elastic omogen sunt *nedispersive*. În seismologie, datorită neomogenității solului, unde Rayleigh sunt dispersive, viteza lor crescând cu adâncimea.

Deoarece amplitudinile (6.97, a, b) scad exponențial cu adâncimea z , unde se numesc *de suprafață*. Cea mai mare parte a energiei lor se propagă printr-un strat limitat la suprafața semispațiului, astfel că atenuarea lor în direcția de propagare este mai lentă decât a undelor P sau S, care se propagă prin tot semispațiul.

S-a calculat că din totalul energiei transmise semispațiului de o presiune oscilantă normală la suprafața $z = 0$, uniform distribuită pe o zonă circulară, 67% se propagă prin unde Rayleigh, 26% prin unde transversale și 7% prin unde longitudinale. De asemenea, pe seismogramele înregistrate în timpul unui cutremur sau al unei explozii în pământ, amplitudinile maxime – deci efectele distructive maxime – corespund undelor Rayleigh.

În general, $c_R = (0,87...0,95) c_S$. În oțel $c_R = 3$ km/s, $c_S = 3,25$ km/s.

Pentru sol se consideră de obicei $\lambda = G$, deci $\nu = \frac{1}{4}$. În acest caz $\varepsilon = \frac{1}{3}$ și ecuația (6.100) admite ca rădăcină reală, pozitivă, subunitară $p = 2 - 2/\sqrt{3} = 0,8453$. Se obține astfel

$$c_R = 0,9194 c_S, \quad q = 0,8475, \quad s = 0,3933, \quad C_4 = -1,468 C_2. \quad (6.101)$$

Amplitudinile (6.97, a, b) devin

$$U(z) = C_1 \left(e^{-0,8475 k_R z} - 0,5773 e^{-0,3933 k_R z} \right), \quad (6.102, a)$$

$$W(z) = -i 0,8475 C_1 \left(e^{-0,8475 k_R z} - 1,7321 e^{-0,3933 k_R z} \right). \quad (6.102, b)$$

În Fig. 6.10 s-a reprezentat, pentru $\nu = 0,25$, variația acestor amplitudini, raportate la valoarea de la suprafață, în funcție de variabila adimensională $\frac{z}{A_R}$, unde $A_R = 2\pi/k_R$ este lungimea de undă Rayleigh (Richart, Hall & Woods, 1970).

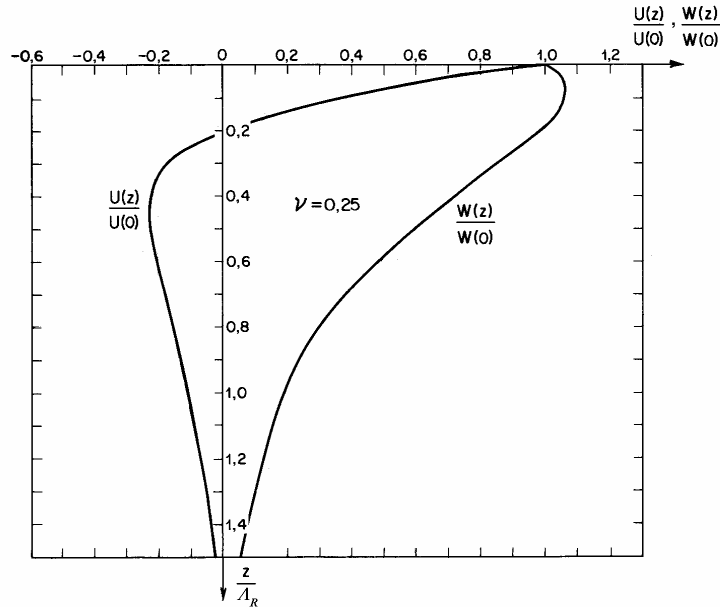


Fig. 6.10

Se constată că pentru $z_0 = 0,193A_R = \frac{1,21}{k_R}$ amplitudinea $U(z_0)$ a mișcării pe direcția x (orizontală) este nulă. Punctele din acest plan se mișcă doar pe direcția z (verticală). Amplitudinea mișcărilor pe verticală este maximă pentru $z_0 = 0,076A_R$, scăzând apoi rapid. La $z = A_R$ aceasta este doar 0,19 din amplitudinea punctelor de la suprafață.

Pentru un punct material, compunerea mișcărilor pe cele două direcții x, z , conduce la o traiectorie eliptică. Astfel, dacă deplasările sunt date de părțile reale ale funcțiilor (6.95, a, b), pentru punctele de la suprafață se obține ecuația parametrică a elipsei sub forma

$$u(x, 0, t) = a \cos(\omega t - k_R x), \quad (6.103, a)$$

$$w(x, 0, t) = -1,468 a \sin(\omega t - k_R x). \quad (6.103, b)$$

În Fig. 6.11 este reprezentată traiectoria punctului material de coordonate $(x = 0, z = 0)$, iar în Fig. 6.12 – evoluția fenomenului la suprafața semispațiului într-o semiperioadă.

La suprafață particulele se deplasează pe orbite eliptice (sau circulare). Pe măsura îndepărtării de suprafață, particulele se deplasează pe orbite mai mici. La o anumită adâncime elipsele degenerază în linii drepte verticale (sau chiar puncte, denumite noduri). Sub această adâncime se inversează directivitatea mișcării în

lungul elipsei, după care apar regiuni în care alternează mișcarea eliptică cu nodurile sau traiectoriile verticale.

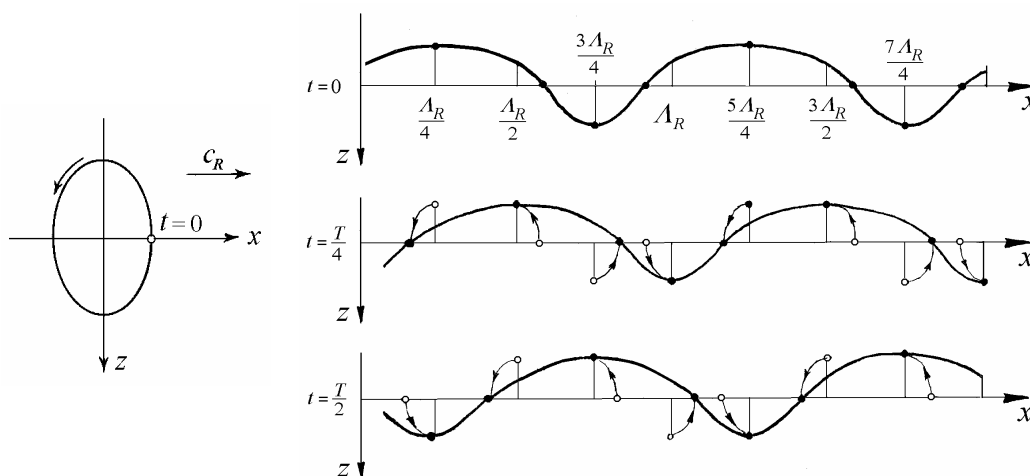


Fig. 6.11

Fig. 6.12

Amplitudinea undelor Rayleigh descrește după legea $1/\sqrt{r}$, unde r este distanța parcursă de undă de la focar.

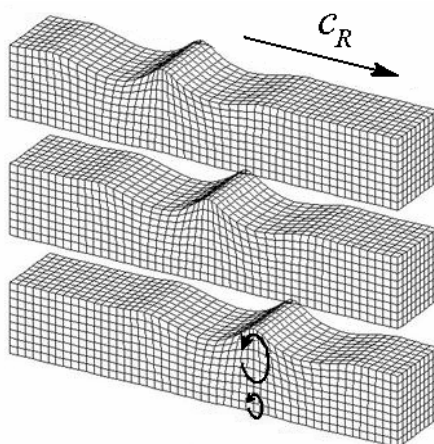


Fig. 6.13

O reprezentare simplificată a propagării undelor Rayleigh este arătată în Fig. 6.13. Se remarcă asemănarea undelor Rayleigh cu undele de la suprafața oceanelor.

În cazul a două semispații din materiale diferite, despărțite de o interfață comună, în lungul interfeței se propagă unde Stoneley. Acestea sunt tot unde nedispersive ca și undele Rayleigh, dar pot exista doar pentru anumite domenii de variație a proprietăților celor două materiale în contact.

6.4.4 Unde Love

În cazul undelor Rayleigh, componentele orizontale u ale deplasărilor punctelor materiale sunt pe direcția de propagare x a unde, deci sunt deplasări longitudinale. Deplasările orizontale transversale v (pe direcția y , perpendiculară pe x) sunt nule.

Totuși, în măsurările seismice s-a constatat existența unor deplasări orizontale transversale $v(x, z, t)$ independente de y , care se propagă de asemenea în direcția x . Apariția acestor unde de tip SH a fost explicată de A. E. G. Love (1911). El a arătat că existența lor este datorată structurii neomogene din punct de vedere mecanic a scoarței pământului, schematizată de el printr-un semispațiu 2, acoperit cu un strat superficial 1, de grosime H (Fig. 6.14).

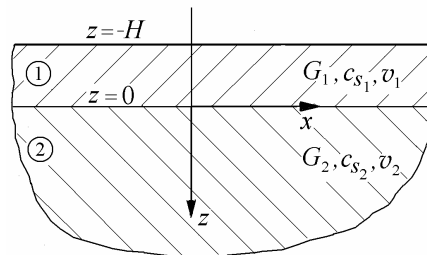


Fig. 6.14

Luând sistemul de axe cu originea în planul de separație al celor două medii, notând cu x direcția de propagare și cu z axa verticală, deplasarea armonică propagată printr-o undă Love are componentele

$$v(x, z, t) = V(z) e^{i(\omega t + k_L x)}, \quad u \equiv 0, \quad w \equiv 0. \quad (6.104)$$

De notat că în continuare se lucrează cu semnul plus în paranteza exponentului soluției (6.104), deci cu unde Love *regressive*.

Ecuțiile de mișcare (6.80, a, c) sunt identic satisfăcute, iar ecuația (6.80, b) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (6.105)$$

Condițiile la limită se pun pe suprafața liberă $z = -H$, pe care

$$\sigma_z = \tau_{xz} \equiv 0, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = G \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \quad (6.106)$$

și pe suprafața de separație, pe care deplasările și tensiunile sunt continue

$$z = 0, \quad (\tau_{yz})_1 = (\tau_{yz})_2, \quad (6.107)$$

$$v_1(x, 0, t) = v_2(x, 0, t).$$

Introducând funcția $v(x, z, t)$ în ecuația (6.105), se obține

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - k_L^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{k_L^2 c_S^2} \right) V = 0,$$

de unde rezultă

$$V(z) = \bar{C} e^{k_L s z} + C e^{-k_L s z}, \quad (6.108)$$

unde

$$s = \left(1 - \frac{\omega^2}{k_L^2 c_S^2} \right)^{1/2} = \left(1 - \frac{c_L^2}{c_S^2} \right)^{1/2}, \quad c_L = \frac{\omega}{k_L}.$$

Parametrul s poate fi real sau imaginar, după cum $c_L < c_S$, respectiv $c_L > c_S$.

Particularizând în funcția (6.108) constantele elastice ale mediilor, se obțin amplitudinile deplasărilor $V_1(z)$ în mediul 1 și $V_2(z)$ în mediul 2

$$V_1(z) = \bar{C}_1 e^{k_L s_1 z} + C_1 e^{-k_L s_1 z}, \quad z \leq 0, \quad (6.109, a)$$

$$V_2(z) = \bar{C}_2 e^{k_L s_2 z} + C_2 e^{-k_L s_2 z}, \quad z \geq 0. \quad (6.109, b)$$

Deoarece amplitudinea $V_2(z)$ trebuie să rămână limitată când $z \rightarrow \infty$, rezultă $\bar{C}_2 = 0$. Condițiile (6.106), (6.107) impuse funcțiilor (6.109, a, b) conduc la sistemul algebric omogen cu necunoscutele \bar{C}_1, C_1, C_2 :

$$\bar{C}_1 e^{-k_L s_1 H} - C_1 e^{k_L s_1 H} = 0, \quad (6.110, a)$$

$$G_1 s_1 (\bar{C}_1 - C_1) = -G_2 s_2 C_2, \quad (6.110, b)$$

$$\bar{C}_1 + C_1 = C_2, \quad (6.110, c)$$

Anulând determinantul coeficienților se obține ecuația

$$\operatorname{th} k_L s_1 H = -\frac{G_2 s_2}{G_1 s_1}, \quad (6.111)$$

în care

$$s_1 = \left(1 - \frac{c_L^2}{c_{S_1}^2}\right)^{1/2}, \quad s_2 = \left(1 - \frac{c_L^2}{c_{S_2}^2}\right)^{1/2}. \quad (6.112)$$

Pentru ca în partea infinită 2 a semispațiului undele să se propage numai în direcția x , este necesar ca s_2 să fie real, deci $c_L < c_{S_2}$. În aceste condiții, ecuația (6.111) are rădăcini reale (deci viteze reale de propagare, c_L , ale undelor Love) dacă $c_L > c_{S_1}$, de unde rezultă că s_1 este imaginar

$$s_1 = i \left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1 \right)^{1/2} = i |s_1| = i r. \quad (6.113)$$

Deoarece, în general, $\operatorname{th} i\alpha = i \operatorname{tg} \alpha$, ecuația (6.111) devine

$$f(c_L) = G_2 \left(1 - \frac{c_L^2}{c_{S_2}^2}\right)^{1/2} - G_1 \left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1\right)^{1/2} \operatorname{tg} k_L H \left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1\right)^{1/2} = 0, \quad (6.114)$$

cu condiția

$$c_{S_1} < c_L < c_{S_2}. \quad (6.115)$$

Se verifică ușor că există o valoare a vitezei c_L care satisface condiția (6.115) și ecuația (6.114), deoarece $f(c_{S_1}) > 0$ și $f(c_{S_2}) < 0$. Această valoare este funcție de numărul de undă k_L , deci undele Love sunt *dispersive*.

Viteza undelor Love este mai mare decât viteza undelor Rayleigh

$$c_R < c_L.$$

Pentru c_L determinat din ecuația (6.114), constantele \bar{C}_1 , C_1 , C_2 rezultă din sistemul (6.110), astfel că undele Love regresive în stratul superficial l sunt date de deplasarea

$$v_1(x, z, t) = \bar{C}_1 \left[e^{i k_L r z} + e^{-i k_L r (2H+z)} \right] e^{i(\omega t + k_L x)}. \quad (6.116)$$

Funcția

$$f_1(x, z, t) = e^{i(\omega t + k_L x + k_L r z)} \quad (6.117)$$

reprezintă o undă plană care se propagă cu viteza $c_{S_1} = \frac{\omega}{k_{S_1}}$ pe direcția normală la planul $x - rz = \text{const.}$

Într-adevăr, argumentul φ al undei (6.117) se poate pune sub forma

$$\varphi = k_{S_1} \left(c_{S_1} t + \frac{k_L}{k_{S_1}} x + \frac{k_L}{k_{S_1}} r z \right),$$

în care

$$\frac{k_L^2}{k_{S_1}^2} + \frac{k_L^2}{k_{S_1}^2} r^2 = \frac{k_L^2}{k_{S_1}^2} + \frac{k_L^2 c_L^2}{k_{S_1}^2 c_{S_1}^2} - \frac{k_L^2}{k_{S_1}^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2} = 1,$$

deci este îndeplinită condiția (6.87) ca funcția (6.117) să satisfacă ecuația undelor (6.85).

Funcția

$$f_2(x, z, t) = e^{i[\omega t + k_L x - k_L r(2H+z)]} \quad (6.118)$$

reprezintă o undă plană care se propagă cu viteza c_{S_1} pe o direcție normală la planul $x - rz = \text{const.}$, defazată față de unda $f_1(x, z, t)$.

Astfel, deplasarea v_1 este dată de suprapunerea a două unde cu direcții de propagare înclinate față de axa x , unda f_1 fiind incidentă pe planul de separație și unda f_2 - reflectată.

Considerând deplasările punctelor materiale date de partea reală a funcției complexe (6.116), se obține

$$\Re(v_1) = 2\bar{C} \cos k_L r(z+H) \cos[\omega t + k_L x - k_L r H]. \quad (6.119)$$

Amplitudinile V_{0_1} , variabile cu z ,

$$V_{0_1} = 2\bar{C} \cos k_L r(z+H)$$

se anulează pentru valorile z care satisfac condiția

$$k_L r(z+H) = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad -H < z \leq 0, \quad (6.120)$$

deci sunt dispuse în plane paralele cu suprafața liberă și sunt maxime pentru $z = -H$, adică pe suprafața liberă. Undele Love sunt unde transversale polarizate orizontal (unde SH).

În Fig. 6.15 s-a reprezentat o undă Love regresivă în stratul 1, în două poziții la interval de timp de $T/4$ ($T = 2\pi/\omega$).

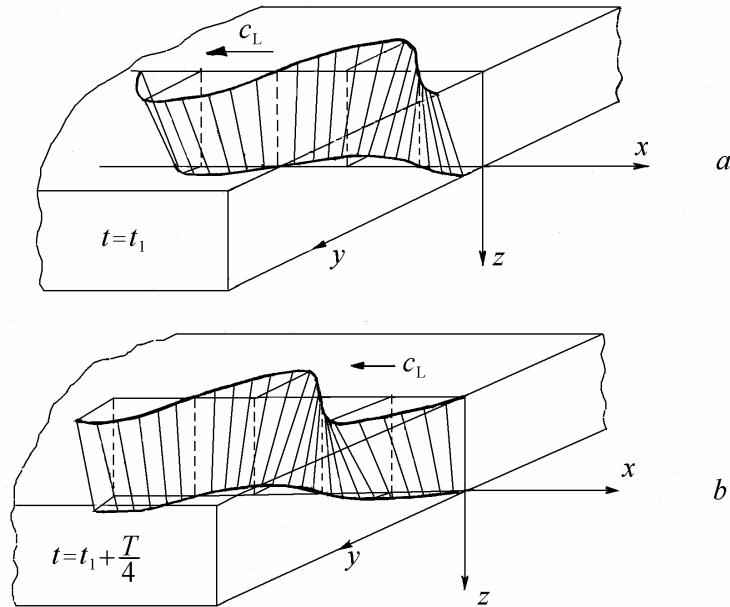


Fig. 6.15

S-a arătat (R. Jones, 1958) că pentru $\frac{G_2}{G_1} \geq 3$ soluțiile ecuației (6.114) sunt aproximativ cele corespunzătoare cazului $\frac{G_2}{G_1} \rightarrow \infty$, când ecuația devine

$$\operatorname{tg} k_L H \left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow \infty,$$

deci pentru

$$k_L H \left(\frac{c_L^2}{c_{S_1}^2} - 1 \right)^{1/2} = \frac{\pi}{2}. \quad (6.121)$$

Înlocuind în (6.121) pe $k_L = \frac{2\pi f}{c_L}$, unde f este frecvența vibrațiilor propagate, rezultă

$$\frac{1}{c_L^2} = -\frac{1}{16H^2} \frac{1}{f^2} + \frac{1}{c_{S_1}^2}, \quad (6.122)$$

deci $\frac{1}{c_L^2}$ depinde liniar de $\frac{1}{f^2}$ (Fig. 6.16).

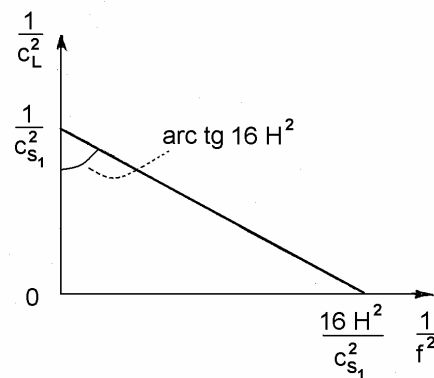


Fig. 6.16

Panta dreptei care reprezintă relația (6.122) este o mărime pe baza căreia poate fi determinată grosimea H a stratului superficial l .

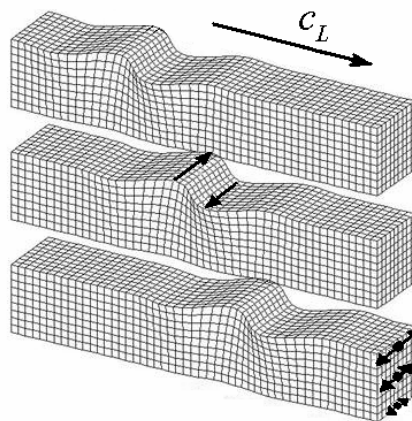


Fig. 6.17

O reprezentare simplificată a propagării undelor Love progresive este arătată în Fig. 6.17.

6.5 Unde ghidate în plăci

Într-un mediu elastic infinit se propagă doar două tipuri de unde nedispersive, undele longitudinale (de compresiune) și undele transversale (de forfecare). Într-o placă se propagă două familii infinite de *unde Lamb*, ale căror viteze depind de raportul între lungimea de undă și grosimea plăcii (H. Lamb, 1917), precum și unde Love.

Undele ghidate sunt folosite în încercări nedistructive. Un semnal de scurtă durată conține o bandă finită de frecvențe. Componentele de joasă frecvență se propagă cu viteze diferite față de cele cu frecvențe înalte, rezultând o dispersie a pachetului de unde. Forma semnalului se modifică pe măsura propagării, în spațiu și în timp, deci este importantă relația viteză-frecvență, reprezentată sub forma *curbelor de dispersie*. Dispersia nu este determinată de proprietățile materialului în care se propagă undele, ci de condițiile la limită impuse de structura ghidului de unde.

6.5.1 Unde Lamb în plăci

Se consideră o placă omogenă de grosime h pe direcția z , având dimensiuni infinite pe direcțiile x și y . Pornind de la ecuațiile de mișcare în trei dimensiuni, se caută soluții armonice de forma (6.95), (6.96), în care $k_R = k$. Ele reprezintă unde sinusoidale care se propagă în direcția x , cu lungimea de undă $2\pi/k$ și frecvența $\omega/2\pi$. Nu există deplasări în direcția y .

La suprafețele libere ale plăcii, tensiunile σ_z și τ_{xz} sunt nule, deci condițiile la limită (6.94) sunt valabile la $z = \pm \frac{h}{2}$. Cele patru condiții conduc la un sistem liniar, omogen în constantele C_1, \dots, C_4 . Anulând determinantul coeficienților, rezultă două ecuații caracteristice, cunoscute ca *ecuațiile de dispersie ale undelor Lamb*.

Cu notațiile specifice undelor Lamb

$$\alpha = ikq = \left(\frac{\omega^2}{c_P^2} - k^2 \right)^{1/2}, \quad \beta = iks = \left(\frac{\omega^2}{c_S^2} - k^2 \right)^{1/2}, \quad (6.123)$$

unde numărul de undă

$$k = \frac{\omega}{c_f}, \quad (6.124)$$

iar c_f este viteza de fază a undelor Lamb în placă, se obține, pentru *modurile simetrice* față de planul median al plăcii

$$\left(\beta^2 - k^2\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha h}{2} + \left(4\alpha\beta k^2\right) \operatorname{tg} \frac{\beta h}{2} = 0, \quad (6.125, a)$$

iar pentru *modurile antisimetrice* față de planul median al plăcii

$$\left(\beta^2 - k^2\right) \operatorname{cotg} \frac{\alpha h}{2} + \left(4\alpha\beta k^2\right) \operatorname{cotg} \frac{\beta h}{2} = 0. \quad (6.125, b)$$

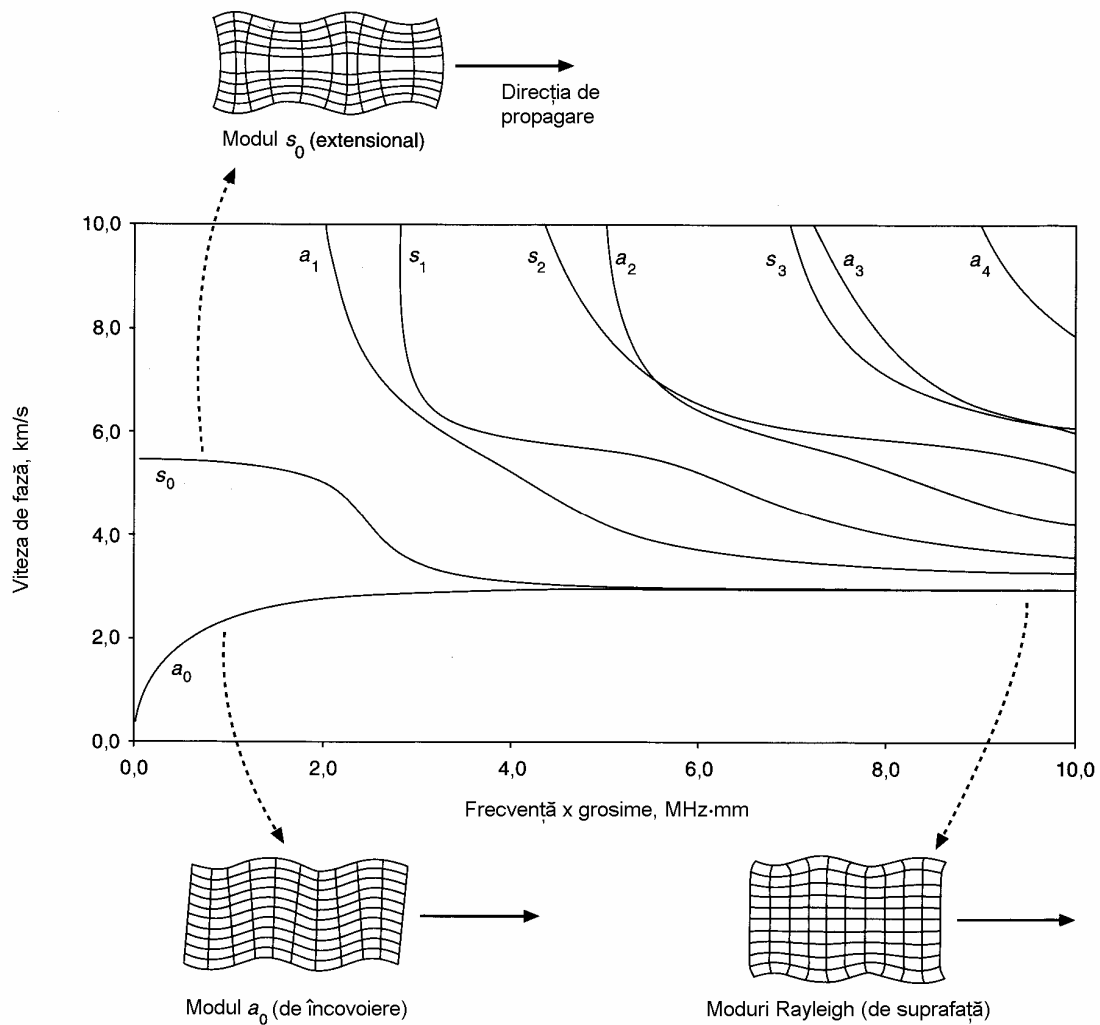


Fig. 6.18

Ecuțiile (6.125) sunt relații implicite între viteza de fază c_f a undelor Lamb (viteza creșterii undelor) și produsul *frecvență* \times *grosimea plăcii*, $f h$.

În fig. 6.18 se prezintă curbele de dispersie ale undelor Lamb pentru o placă din oțel (Lowe, 2002). Aceste curbe pot reprezenta modurile de propagare fie într-o placă de 1 mm grosime în domeniul de frecvențe până la 10 MHz, fie într-o placă de 2 mm grosime, la frecvențe până la 5 MHz. Modurile 's' sunt simetrice iar modurile 'a' sunt antisimetrice față de planul median al plăcii. Prin 0,1,2,.. se arată indicii modului de propagare respectiv.

Modurile fundamentale, s_0 și a_0 , sunt cele mai utilizate în încercări nedistructive, fiind relativ distanțate între ele la frecvențe joase. Ele există la toate frecvențele și în majoritatea aplicațiilor practice transportă mai multă energie decât modurile de ordin superior. Formele acestor moduri sunt reprezentate în fig. 6.18. Orbita eliptică a punctelor materiale are semiaxa mare în planul plăcii - la modul simetric, respectiv perpendiculară pe planul plăcii - la modul antisimetric.

La creșterea frecvenței, vitezele ambelor moduri variază, tinzând asimptotic la frecvențe înalte spre viteza undelor Rayleigh. La aceste frecvențe, formele modurilor de undă arată că mișcarea are loc tot mai mult doar în vecinătatea suprafețelor plăcii. La limită, în lungul ambelor suprafețe se propagă unde Rayleigh. În cazul modului s_0 , cele două unde Rayleigh sunt în fază; în cazul modului a_0 , ele sunt în antifază. În toate modurile Lamb, mișcarea particulelor are loc în planul definit de normala la suprafața plăcii și direcția de propagare.

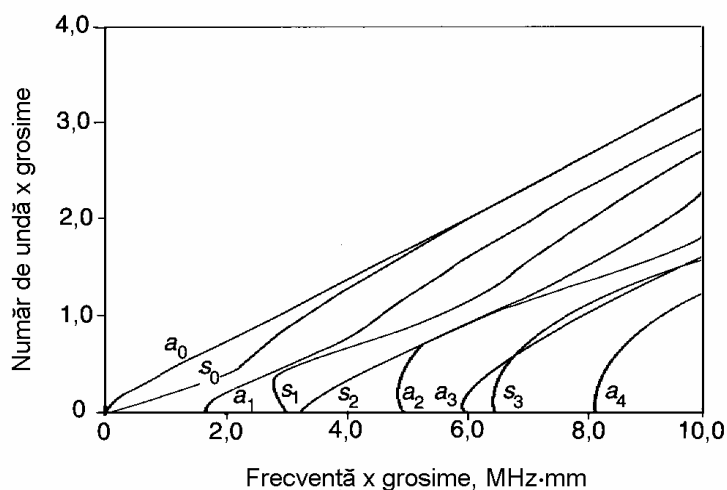


Fig. 6.19

O formă diferită a curbelor de dispersie a undelor Lamb este prezentată în fig. 6.19, unde s-a înlocuit viteza de fază prin numărul de undă (înmulțit cu grosimea plăcii).

Curbele vitezei de fază prezintă viteza *crestelor* undelor, dar aceasta nu este, de fapt, viteza de deplasare a unui impuls sau unui pachet de unde de scurtă durată. Un pachet de unde se deplasează cu *viteza de grup*, egală cu derivata pulsației în raport cu numărul de undă (6.30)

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (6.126)$$

sau, în funcție de viteza de fază,

$$c_g = c_f - \Lambda_f \frac{\partial c_f}{\partial \Lambda_f}, \quad (6.127)$$

unde $\Lambda_f = 2\pi/k$ este lungimea de undă.

Așa cum s-a arătat anterior, dacă semnalul corespunzător unui pachet de unde este o undă sinusoidală modulată în amplitudine de o înfășurătoare, atunci unda modulantă se propagă cu *viteza de grup* în timp ce *crestele* undei sinusoidale în interiorul înfășurătorii se deplasează cu *viteza de fază* pentru frecvența respectivă.

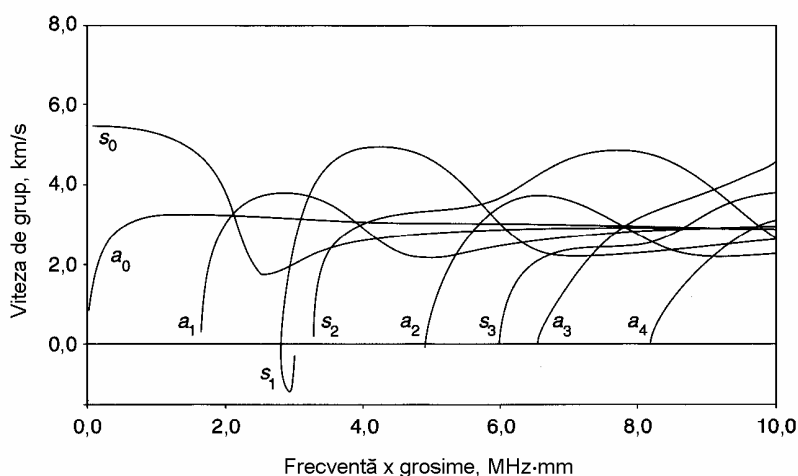


Fig. 6.20

Viteza de grup oferă deci informații asupra timpilor de propagare a pachetelor de undă pe distanțe mari, utile în controlul nedistructiv. Figura 6.20

prezintă curbele de dispersie ale vitezei de grup a undelor Lamb pentru o placă din oțel. Calculul acestora se poate face pe baza curbelor de dispersie a vitezei de fază (fig. 6.18) utilizând relația

$$c_g(\xi) = c_f(\xi) \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{c_f}{\xi \frac{dc_f}{d\xi}}} \right), \quad (6.128)$$

în care $\xi = fh$, f este frecvența undei și h este grosimea plăcii.

6.5.2 Unde Love în plăci

Într-o placă orizontală infinită, în afara modurilor Lamb se pot propaga și moduri de undă transversale orizontale, de tip Love. În acest caz, mișcarea punctelor materiale are loc perpendicular pe direcția de propagare și paralel cu suprafața plăcii.

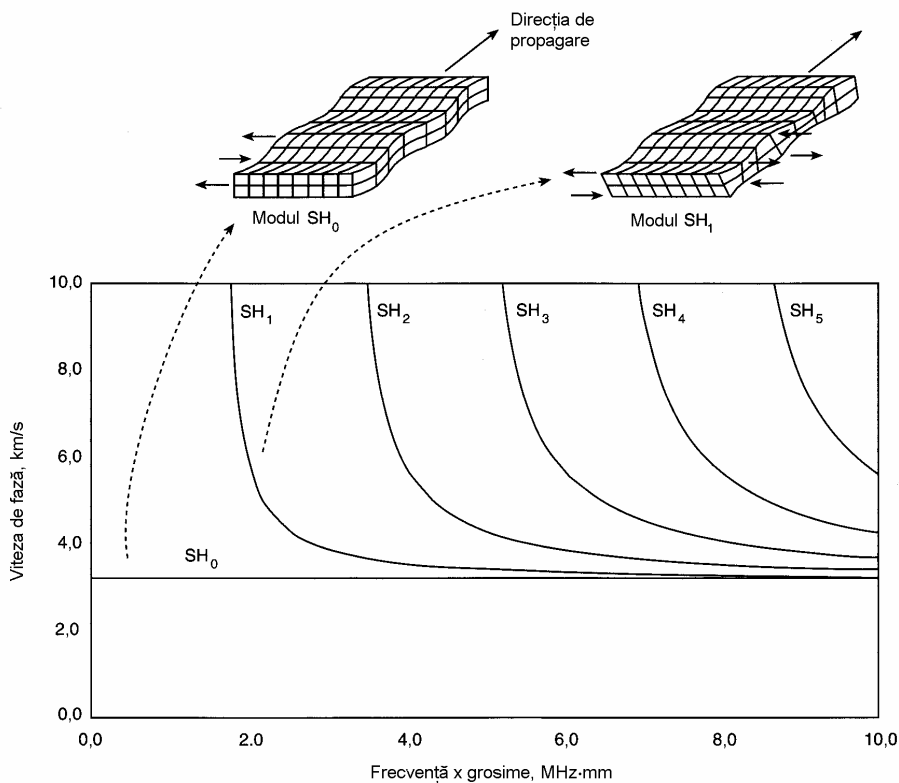


Fig. 6.21

În fig. 6.21 se arată curbele de dispersie ale modurilor Love calculate pentru o placă din oțel (Lowe, 2002), precum și formele modale ale deplasărilor pentru primele două moduri.

În modul fundamental SH_0 , deplasarea nu variază pe grosimea plăcii, ci numai în direcția de propagare. Ca urmare, viteza de propagare este egală cu viteza constantă a undelor transversale în trei dimensiuni, c_S .

În modul SH_1 , variația deplasării pe grosimea plăcii are forma unei semi-sinusoide. Placa este deformată antisimetric, cu deplasări pozitive pe o suprafață și negative pe cealaltă. Deplasările în modurile de ordin superior au legi de variație pe grosimea plăcii cu număr crescător de semiunde.

Trebuie notat că formele modale pentru fiecare mod SH sunt identice în orice punct de pe curba de dispersie, spre deosebire de majoritatea undelor ghidate, la care forma modală variază considerabil în lungul curbei de dispersie.

Bibliografie

1. Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North Holland, New York, 1984.
2. Ananiev, I. V., *Manual pentru calculul vibrațiilor proprii ale sistemelor elastice*, Gostehizdat, Moscova, 1946 (în l. rusă).
3. Babakov, I. M., *Teoria vibrațiilor*, Nauka, Moscova, 1965 (în l. rusă).
4. Babitsky, V. I., *Theory of Vibro-Impact Systems and Applications*, Springer, Berlin, 1998.
5. Beards, C. F., *Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems*, Edward Arnold, London, 1995.
6. Benaroya, H., *Mechanical Vibration, Analysis, Uncertainties and Control*, Prentice Hall International, Upper Saddle River, N.J., 1998.
7. Bendat, J. S. and Piersol, A. G., *Random Data: Analysis, Measurement and Procedures*, Wiley Interscience, New York, 1986.
8. Beranek, L. L., *Noise and Vibration Control*, McGraw-Hill, New York, 1971.
9. Biderman, V. A., *Teoria aplicată a vibrațiilor mecanice*, Vâșșia Șkola, Moscova, 1972 (în l. rusă).
10. Biezeno, C. B. und Grammel, R., *Technische Dynamik*, Springer, Berlin, 1939.
11. Bishop, R. E. D., *Vibration*, Cambridge University Press, 1965.
12. Bishop, R. E. D., Gladwell, G. M. L. and Michaelson, S., *The Matrix Analysis of Vibration*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1965.
13. Bishop, R. E. D. and Johnson, D., *The Mechanics of Vibration*, Cambridge Univ. Press, 1960.
14. Bisplinghoff, R., Ashley, H. and Halfman, R., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, Cambridge, 1955.
15. Blake, M. P. and Mitchell, W. S., *Vibration and Acoustic Measurement Handbook*, Spartan, New York, 1972.
16. Blevins, R.D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.

17. Bogoliubov, N. N. și Mitropolski, Iu. A., *Metode asimptotice în teoria oscilațiilor neliniare*, ed. 3, Fizmatgiz, Moscova, 1963 (în l. rusă).
18. Braun, S., Rao, S. S. and Ewins, D. J. (eds.), *Encyclopedia of Vibration*, Academic Press, London, 2002.
19. Broch, J. T., *Mechanical Vibration and Shock Measurements*, 2nd ed., Brüel & Kjær, Nærum, 1980.
20. Buzdugan, Gh., Fetcu, L. și Radeș, M., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei, București, 1975.
21. Buzdugan, Gh., Fetcu, L. și Radeș, M., *Vibrații mecanice*, ed. 2, Editura didactică și pedagogică, București, 1982.
22. Buzdugan, Gh., Mihăilescu E. și Radeș, M., *Măsurarea vibrațiilor*, Editura Academiei, București, 1979.
23. Buzdugan, Gh., Mihăilescu, E. and Radeș, M., *Vibration Measurement*, Martinus Nijhoff Publ., Dordrecht, 1986.
24. Bykhovsky, I. I., *Fundamentals of Vibration Engineering*, Mir Publishers, Moscow, 1972.
25. Church, A. H., *Mechanical Vibrations*, Wiley, New York, 1957.
26. Clough, R. W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw Hill, New York, 1975.
27. Collar, A. R. and Simpson, A., *Matrices and Engineering Dynamics*, Ellis Horwood, Chichester, 1987.
28. Crandall, S. H. and Mark, W. D., *Random Vibration in Mechanical Systems*, Academic Press, New York, 1963.
29. Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, Dover, New York, 1985 (1st ed. McGraw-Hill, New York, 1934).
30. Dimarogonas, A. D., *Vibration Engineering*, West Publ. Co., St. Paul, MN, 1976.
31. Dincă, F. și Teodosiu, C., *Vibrații neliniare și aleatoare*, Editura tehnică, București, 1969.
32. Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F., *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw Hill, New York, 1957.
33. Ewins D. J., *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, 2nd ed., Research Studies Press, Taunton, 2000.
34. Fertis, D. G., *Mechanical and Structural Vibrations*, Wiley, New York, 1995.
35. Filippov, A. P., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Naukova Dumka, Kiev, 1965 (în l. rusă).

36. Frazer, R. A., Duncan, W. J. and Collar, A. R., *Elementary Matrices*, AMS Press, New York, 1983 (Reprint of C.U.P. edition of the original 1938 text).
37. Gasch, R. und Knothe, K., *Strukturodynamik*, Band 1: *Discrete Systeme*. Band 2: *Kontinua und ihre Diskretisierung*, Springer, Berlin, 1987.
38. Geradin, M. and Rixen, D., *Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics*, 2nd ed., Wiley, New York, 1997.
39. Graff, K. F., *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, New York, 1991.
40. Hamburger, L. și Buzdugan, Gh., *Teoria vibrațiilor cu aplicații în inginerie*, Editura tehnică, București, 1958.
41. Hansen, H. M. and Chenea, P. F., *Mechanics of Vibrations*, Wiley, N.Y., 1952.
42. Harris, C. M. și Crede, C. M. (editori), *Șocuri și vibrații*, Editura tehnică, București, 1968 (trad. din l. engleză)..
43. Hayashi, C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, New York, 1964.
44. Heylen, W., Lammens, S. and Sas, P., *Modal Analysis Theory and Testing*, K. U. Leuven, 1997.
45. Hohenemser, K. und Prager, W., *Dynamik der Stabwerke*, Springer, Berlin, 1933.
46. Holzweissig, F. und Dresig, H., *Lehrbuch der Maschinendynamik*, 3rd ed., Fachbuchverlag, Leipzig, 1992.
47. Hunt, J. B., *Dynamic Vibration Absorbers*, Mechanical Engineering Publications, London, 1979.
48. Hurty, W. C. and Rubinstein, M. F., *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
49. Ibrahim, R. A., *Parametric Random Vibration*, Research Studies Press Ltd., Taunton, 1998.
50. Inman, D. J., *Engineering Vibration*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1994.
51. Ioriș Iu. I., *Măsurarea vibrațiilor*, Mașghiz, Moscow, 1963 (în l. rusă).
52. Irretier, H., *Schwingungstechnik*, 2nd ed., University of Kassel, 1988.
53. Jacobsen, L. S. and Ayre, R. S., *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill, New York, 1958.
54. James, M. L., Smith, G. M., Wolford, J. C. and Whaley, P. W., *Vibration of Mechanical and Structural Systems with Microcomputer Applications*, Harper & Row, New York, 1989.

55. Kauderer, H., *Nichtlineare Mechanik*, Springer, Berlin, 1958.
56. Kelly S. G., *Fundamentals of Mechanical Vibrations*, 2nd ed., McGraw-Hill Higher Education, New York, 2000.
57. Kelly S. G., *Schaum's Outline on Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill Engineering CS, New York, 1996.
58. Ker Wilson, W. T., *Practical Solution of Torsional Vibration Problems*, 2nd ed., Vol. I-V, Wiley, New York, 1956-1965.
59. Ker Wilson, W. T., *Vibration Engineering: A Practical Treatment*, Ch. Griffin & Co., London, 1959.
60. Klotter, K., *Technische Schwingungslehre*, Band I: *Einfache Schwingungen*, Band II: *Technische Schwingungslehre*, Springer, Berlin, 1960, 1978.
61. Koloušek, V., *Dynamik der Baukonstruktionen*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.
62. Kolsky, H., *Stress Waves in Solids*, Dover Publications, New York, 1963.
63. Korenev, B. G. and Reznikov, L. M., *Dynamic Vibration Absorbers. Theory and Technical Applications*, Wiley, New York, 1993.
64. Krämer, E., *Maschinendynamik*, Springer, Berlin, 1984.
65. Lalanne M., Berthier, P. and Der Hagopian, J., *Mechanical Vibrations for Engineers*, Wiley, New York, 1983.
66. Lancaster, P., *Lambda Matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
67. Lee, K. Ch., *Vibrations of Shells and Rods*, Springer, Berlin, 1999.
68. Leissa, A. W., *Vibration of Plates*, NASA SP-160, 1969.
69. Leissa, A. W., *Vibration of Shells*, NASA SP-288, 1973.
70. Levy, S. and Wilkinson, J. C., *The Component Element Method in Structural Dynamics*, Mc-Graw-Hill, New York, 1976.
71. Lorenz, H., *Grundbau Dynamik*, Springer, Berlin, 1960.
72. Lowe, M. J. S., *Wave Propagation*, in *Encyclopedia of Vibration*, Academic Press, London, 2002, p.1551-1570.
73. Lyon, R. H., *Random Noise and Vibration in Space Vehicles*, SVIC, Washington, DC, 1967.
74. Macduff, J. N. and Currier, J. R., *Vibration Control*, McGraw-Hill, New York, 1958.
75. Maia, N. M. M. and Silva, J. M. M., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press, Taunton, 1997.

76. Magnus, K., *Schwingungen*, Teubner, Stuttgart, 1976.
77. Marguerre, K. and Wölfel, H., *Mechanics of Vibration*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1979.
78. Mazet, R., *Mécanique vibratoire*, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, Liège, 1955.
79. McCallion, H., *Vibration of Linear Mechanical Systems*, Wiley, New York, 1973.
80. McConnell, K. G., *Vibration Testing*, Wiley, New York, 1995.
81. McLachlan, N. W., *Theory of Vibrations*, Dover, New York, 1951.
82. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New York, 1967.
83. Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1975.
84. Meirovitch, L., *Fundamentals of Vibrations*, McGraw-Hill International Edition, Boston, 2001.
85. Meirovitch, L., *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice-Hall International, Upper Saddle River, N. J., 1997.
86. Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*, Van Nostrand, New York, 1962.
87. Mobley, R. K., *Vibration Fundamentals*, Newnes, Boston, 1999.
88. Morris, J., *The Strength of Shafts in Vibration*, Crosbie Lockwood & Co., London, UK, 1929.
89. Morrow, C. T., *Shock and Vibration Engineering*, Wiley, New York, 1963.
90. Morse, P. M., *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
91. Morse, P. M., *Vibration and Sound*, McGraw-Hill, New York, 1948.
92. Mottershead, J. E. (ed.), *Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1989.
93. Müller, P. C. und Schiehlen, W. O., *Lineare Schwingungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1976.
94. Myklestad, N. O., *Fundamentals of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.
95. Nestorides, E. J., *A Handbook on Torsional Vibration*, Cambridge Univ. Press, 1958.
96. Newland, D. E., *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, 1989.
97. Newland, D. E., *Random Vibrations and Spectral Analysis*, Longman, London, 1975.

98. Nowacki, W., *Dinamica sistemelor elastice*, Editura tehnică, București, 1969 (trad. din l. poloneză).
99. Osiński Z. (ed.), *Damping of Vibrations*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1998.
100. Palmov, V., *Vibrations of Elasto-Plastic Bodies*, Springer, Berlin, 1998.
101. Panovko, Ya. G., *Elements of the Applied Theory of Elastic Vibrations*, Mir Publishers, Moscow, 1971.
102. Panovko, Ia. G., *Bazele teoriei aplicate a vibrațiilor și șocurilor*, Mașinostroenie, Moscova, 1976 (în l. rusă).
103. Panovko, Ia. G., *Frecarea internă în timpul vibrațiilor sistemelor elastice*, Fizmatgiz, Moscova, 1960 (în l. rusă).
104. Paz, M., *Structural Dynamics. Theory and Computation*, Van Nostrand Reinhold Comp., New York, 1980.
105. Pestel, E. C. and Leckie, F. A., *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
106. Pilkey, W.D. and Pilkey, B., *Shock and Vibration Computer Programs: Reviews and Summaries*, SVIC, Washington, DC, 1975.
107. Prentis, J. M., *Dynamics of Mechanical Systems*, 2nd ed., Ellis Horwood, Chichester, 1980.
108. Pusey, H. C., Volin, R. H. and Showalter, J. G., *An International Survey of Shock and Vibration Technology*, SVIC, Washington, DC, 1979.
109. Radeș, M., *Mechanical Vibrations*, Editura Printech, București, 2006.
110. Radeș, M., *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Editura Academiei, București, 1979.
111. Rao, J. S., *Dynamics of Plates*, Marcel Dekker, New York, 1999.
112. Rao, S. S., *Mechanical Vibrations*, 3rd ed., Addison-Wesley, 1995.
113. Rayleigh, Lord (Strutt, J. W.), *The Theory of Sound*, Macmillan, London, 1894 (Reprinted by Dover, 1945).
114. Richart, F. E., Jr., Hall, J. R., Jr. and Woods, R. D., *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.
115. Robson, J. D., *Random Vibration*, Edinburgh Univ. Press, UK, 1964.
116. Rocard, Y., *Dynamique générale des vibrations*, 3rd ed., Masson, Paris, 1960.
117. Roseau, M., *Vibrations des systèmes mécaniques*, Masson, Paris, 1984.
118. Ruzicka, J. E. and Derby, T. F., *Influence of Damping in Vibration Isolation*, SVIC, Washington, DC, 1971.

119. Salter, J. P., *Steady-State Vibration*, Kenneth Mason, Havant, 1969.
120. Scanlan, R. H. and Rosenbaum, R., *Aircraft Vibration and Flutter*, Macmillan Co., New York, 1951.
121. Sevin, E. and Pilkey, W. D., *Optimum Shock and Vibration Isolation*, SVIC, Washington, DC, 1971.
122. Seto, W. W., *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*, Schaum, New York, 1964.
123. Smith J. D., *Gear Noise and Vibration*, Marcel Dekker, New York, 1999.
124. Snowdon, J. C., *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems*, Wiley, New York, 1968.
125. Snowdon, J. C. and Ungar, E. E., *Isolation of Mechanical Vibration, Impact and Noise*, AMD Vol.1, ASME, New York, 1973.
126. Sólnes, J., *Stochastic Processes and Random Vibrations. Theory and Practice*, Wiley, New York, 1997.
127. Soong, T. and Grigoriu, M., *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
128. Sorokin, E. S., *Teoria amortizării interne în vibrațiile sistemelor elastice*, Gosstroizdat, Moscova, 1960 (în l. rusă).
129. Steinberg, D. S., *Vibration Analysis for Electronic Equipment*, 3rd ed., Wiley, New York, 2000.
130. Stoker, J. J., *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Wiley, New York, 1950.
131. Szemplińska-Stupnicka, W., *The Behaviour of Nonlinear Vibrating Systems*, Vol.2, *Advanced Concepts and Applications to Multi-Degree-of-Freedom Systems*, Kluwer, 1990.
132. Thomson, W. T., *Theory of Vibration with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972; 4th ed., Stanley Thornes Publ., Cheltenham, 1998.
133. Thomsen, J. J., *Vibrations and Stability. Order and Chaos*, McGraw-Hill, New York, 1997.
134. Timoshenko, S., Young, D. H. and Weaver, W. Jr., *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., Wiley, New York, 1974 (1st ed. 1928).
135. Tong, K. N., *Theory of Mechanical Vibration*, Wiley, New York, 1960.
136. Tongue, B. H., *Principles of Vibration*, Oxford University Press, 2002.
137. Tse, F. S., Morse, I. E. and Hinkle, R. T., *Mechanical Vibrations: Theory and Applications*, Allyn and Bacon, Boston, MA, 1963, 2nd ed., 1978.

138. Tuplin, W. A., *Torsional Vibrations*, 2nd ed., Sir Issac Pitman and Sons, London, UK, 1966.
139. Ulbrich, H., *Maschinendynamik*, Teubner, Stuttgart, 1996.
140. Vernon, J. B., *Linear Vibration Theory: Generalized Properties and Numerical Methods*, Wiley, New York, 1967.
141. Vierck, R. K., *Vibration Analysis*, International Textbook Co., Scranton, PA, 1967.
142. Voinea, R. și Voiculescu, D., *Vibrații mecanice*, Institutul Politehnic București, 1979.
143. Voinea, R., Voiculescu, D. și Ceaușu, V., *Mecanica*, Editura didactică și pedagogică, București, 1975.
144. Wagner, K. W., *Lehre von den Schwingungen und Wellen*, Dietrich Verlag, Wiesbaden, 1957.
145. Warburton, G. B., *The Dynamical Behaviour of Structures*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
146. Walker, D. N., *Torsional Vibration of Turbomachinery*, McGraw-Hill Engineering Reference, New York, 2004.
147. Wallace, R. H., *Understanding and Measuring Vibrations*, Wykeham Publications, London, 1970.
148. Yu, Y.-Y., *Vibrations of Elastic Plates*, Springer, Berlin, 1995.
149. Ziegler, G., *Maschinendynamik*, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1977.
150. *** *Rezistență. Stabilitate. Vibrații*, 3 vol. (ed. I. A. Birger și Ia. G. Panovko), Mașinostroenie, Moscova, 1968.

Index

- Absorbitor dinamic 164
 - Stockbridge 169
- Acceleranță 51
- Accelerometru 63
- Amortizare 6
 - coulombiană 6
 - critică 34
 - de tip Rayleigh 151
 - ereditară 66
 - histeretică 6, 47
 - modală 152
 - structurală 6, 46
 - vâscoasă 6, 34
 - echivalentă 6, 49
 - neproportională 173
 - proporțională 151
- Amortizor 34
 - Houdaille 162
- Amplitudine 13
 - complexă 50
 - la rezonanță 44
- Analiză modală 108, 151
- Antirezonanță 29, 111, 137
- Arbore 197
- Atenuarea undelor 306
- Bara Bernoulli-Euler** 261
 - cu mase concentrate 186
 - încastrată la capete 267
 - în consolă 265
 - liberă la capete 266
 - Timoshenko 290
- Bătăi 23, 148
- Bucă de histerezis 45
- Cadru plan 222
- Captor de viteze 63
 - seismic 60
- Câțul lui Rayleigh 107
- Clădire forfecată 195
- Coeficient de amortizare 34
 - modală 152
 - structurală 47
- de vâscoasă 34
- de flexibilitate 128, 189
- de influență 125
- Condiții inițiale 11
 - la limită 263
 - naturale 273
- Coordonate locale 215
 - modale 106
 - naturale 212
- Cuplaj dinamic 140
 - static 140
- Curbe de rezonanță 43
 - de răspuns în frecvență 43
 - în frecvență 24, 43, 74, 158, 244
- Decrement logaritmic** 37
- Diagrame 52
 - Bode 53, 158
 - deplasare-forță 44
 - FRF 244
 - Nyquist 53
 - polare 55
- Distorsiuni 63
- Ecuția caracteristică** 102
 - de mișcare 103, 113, 126, 139, 220
 - diferențială de echilibru 223
 - undelor 294, 316
- Energie cinetică 15
 - de deformație 194, 214, 227, 238
 - disipată prin amortizare 45
 - potențială 15
- Excitație armonică 21, 108, 280
 - cu mase excentrice în rotație 28
 - la bază 29, 59
 - nearmonică 80
 - prin masă 20
 - prin șoc 88
- Factor de amortizare** 175
 - structurală 47
 - de amplificare dinamică 24

- de pierderi 40
- Fenomene de salt 79
- Figuri Lissajous 45
- Flexibilitate 124
- Forme proprii 265, 286, 289
- Formula lui Dunkerley 192
 - – Rayleigh 17, 194
- Fracțiune din amortizarea critică 35
- Frecvența 12
 - de rezonanță 43
 - proprie 163
 - – amortizată 26
 - – fundamentală 16
 - – neamortizată 10, 14
- Funcții de formă 213, 225
 - de răspuns în frecvență 51, 157, 243
 - de transfer 156
- Grade de libertate 99
- Grilaje 236
- Grinzi continue 271
- Impedanță mecanică 52
- Impuls 81
 - dreptunghiular 86
 - rampă 81
 - semisinusoidal 91
 - triunghiular 84, 89
- Integrala lui Duhamel 21
- Izocrone 75
- Lungime de undă 297
- Masa adițională 49
 - aparentă 52
 - modală 187
- Matricea de amortizare 151
 - de flexibilitate 125
 - de masă 101, 238
 - – coerentă 215, 229
 - – modală 108
 - de rigiditate 101, 227, 237
 - – modală 108
 - FRF 157, 243
- Metoda energetică 15
 - lui Rayleigh 16
 - punctelor de semiputere 47
- Mișcare armonică 9
- Mobilitate 51
- Mod de corp rigid 116, 267
 - propriu 101, 115, 127, 141, 263
- Normalizare 102, 107, 264
- Orthogonalitate 105, 269
- Oscilații 1
- Pendule cuplate 145
- Perioada proprie 11
- Precesia rotorilor 64
- Principiul lui d’Alembert 100
- Propagarea energiei 304
 - undelor 291
- Pulsația proprie 102
 - – amortizată 35, 153, 175
 - – neamortizată 10, 14, 177
- Puncte de semiputere 48
- Raport de amortizare 35, 152
 - de angrenare 120
- Răspuns la impuls 81, 89, 91
 - la excitație armonică 108, 117, 135, 280
- Receptanță 51, 179
- Rezonanță 5, 25
- Rigiditate 11
 - cubică 72
 - dinamică 52
 - la răsucire 14
 - modală 187
 - torsională 14
- Rotorul Laval 31
- Salt 79
- Sisteme
 - amortizate 150
 - continue 2, 261
 - cu două grade de libertate 99
 - cu mai multe grade de libertate 185
 - cu mase concentrate 186
 - cu roți dințate 120
 - cu un grad de libertate 3, 9
 - discrete 2, 206
 - neliniare 71
 - ramificate 122
 - torsionale 13, 197
- Spectrul răspunsului 92
- Structură cu subsisteme repetate 204
 - din bare articulate 212
 - multietajată 195
- Șoc 80
- Tensiuni dinamice 119
- Transmisibilitate 30, 59

- Trecerea prin rezonanță 27
- Turație critică 31
- Unde armonice 297
 - elastice 291
 - ghidate 333
 - în medii elastice 316
 - Lamb 333
 - longitudinale 294, 318
 - Love 327, 337
 - Rayleigh 321
 - Stoneley 327
 - transversale 310, 318
- Unghi de fază 11
- Valori proprii 127
- Vectori modali 103, 131
 - proprii 127
- Vibrații 1
 - autoîntreținute 5
 - cuplate de translație și rotație 139
 - de încovoiere 124
 - de torsiune 113, 288
 - de translație 100
 - forțate 4
 - – amortizate 40
 - – neamortizate 20
 - libere 4, 101
 - – amortizate 33, 151
 - – neamortizate 9
 - longitudinale 285
 - staționare 41
 - tranzitorii 80
 - transversale 310, 318
- Vibrometru 63
- Viteza de fază 300, 310
 - de grup 302, 310, 312